J. QUINET

curso elemental de matemáticas superiores

tomo
2

desarrollos en serie
cálculo de complejos
cálculo diferencial
y aplicaciones

SERIE POLITECNICA

Curso Elemental de Matemáticas Superiores

TOMO II

Desarrollos en Serie. Cálculo de complejos
Cálculo diferencial y aplicaciones

OBRAS DEL MISMO AUTOR PUBLICADAS POR

PARANINFO

CURSO ELEMENTAL DE MATEMATICAS SUPERIORES

TOMO I

Complementos de álgebra. Las derivadas y sus aplicaciones, con 400 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO II

Desarrollos en serie. Cálculo de complejos. Cálculo diferencial, con 700 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO III

Cálculo integral y primeras aplicaciones, con 450 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO IV

Continuación del cálculo integral y aplicaciones, con 290 ejercicios y problemas a resolver.

Cálculo integral, complementos y aplicaciones.
Cálculo de los momentos de inercia.
Algunas aplicaciones de las integrales.
La serie de *Fourier*, con *ejemplos detallados* de desarrollos.
Integración gráfica y cálculo aproximado de una integral.
Integrales curvilíneas.
Integrales curvilíneas.
Integración de diferenciales totales.
Integrales múltiples. Integrales dobles. Nociones sobre integrales triples.

TOMO V

Ecuaciones diferenciales y aplicaciones, con 300 ejercicios y problemas a resolver.

Ecuaciones de primer y segundo orden, tipos diversos, con numerosos ejemplos.
48 ejemplos de aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales a problemas (mecánica, física, electricidad, termodinámica, resistencia de materiales, etc.).
Ecuaciones en derivadas parciales (aplicación a las cuerdas vibrantes y a la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de las líneas).
Introducción al estudio del potencial, y al estudio de los campos.

TOMO VI, con 782 ejercicios y problemas a resolver.

Geometría analítica plana.
Estudio de las cónicas y aplicaciones.
Trazado de curvas con numerosos ejemplos detallados.
Algunas aplicaciones físicas de las cónicas.

TEORIA Y PRACTICA DE LOS CIRCUITOS ELECTRONICOS Y DE LOS AMPLIFICADORES

TOMO I

Teoría y aplicaciones del cálculo de complejos al estudio de los circuitos de electrónica.

TOMO II

Los amplificadores HF y BF. Los osciladores y la modulación. Los filtros y los puentes de medida.

TOMO III

Estudio general de la propagación de la corriente HF a lo largo de las líneas y aplicaciones. Antenas. — Ecuaciones de Maxwell y aplicaciones.

SERIE POLITECNICA

Curso Elemental de Matemáticas Superiores

Cálculo diferencial e integral y Geometría analítica plana con un gran número de ejemplos y aplicaciones

por

J. QUINET

Ingeniero de la Escuela Superior de Electricidad
Profesor de la Escuela Nacional de Radioelectricidad de Clichy
Profesor honorario de Matemáticas generales de la Escuela Central de T.S.H.

Prólogo de

R. BARTHÉLEMY

Miembro de la Academia de Ciencias

TOMO II

Desarrollos en serie. Cálculo de complejos Cálculo diferencial y aplicaciones

De uso para:
Ingenieros, alumnos-ingenieros,
Técnicos diversos, estudiantes

SERIE POLITECNICA

1966

PARANINFO

MADRID

Traducido por
FELIX VIDONDO MORRAS

© 1965 DUNOD

Depósito Legal: Z. 229.-1966

PARANINFO · Meléndez Valdés, 14 y 65 — MADRID (15)

Cometa, S. A. - León XIII, 24 - Zaragoza - 1966

PROLOGO

J. QUINET es un profesor al cual aprecio desde hace 30 años.

Para su obra de matemáticas superiores, le hubiera sido muy fácil obtener el prólogo de alguna notabilidad de las muchas que tenemos en Francia, pero se ha contentado con un «usuario», con un hombre de los que no crean, que no juzgan las matemáticas, pero que intentan servirse de ellas.

Por tanto, yo no estoy especialmente calificado para presentar la obra de un especialista. He aceptado, no obstante, por que J. QUINET, Profesor de Matemáticas, se inició como especialistas en Electricidad y ha continuado siéndolo.

Esto explica la forma atractiva que ha sabido dar a exposiciones consideradas frecuentemente como áridas.

Sin abandonar la línea, ni el rigor de la enseñanza clásica, que proporciona continuamente un sincero placer a aquellos (los hay) que aman las matemáticas, J. QUINET, al mismo tiempo que desarrolla el programa, y no al final, muestra para qué sirven las fórmulas de álgebra en la resolución de los problemas de física.

Por ello, el estudiante, el futuro ingeniero, se dan cuenta de la necesidad de esta «herramienta» intelectual, sin la cual, a pesar de sus posibles dotes de intuición o de invención, no podrían franquear ciertos límites, rápidamente alcanzados. Piensa, que este prodigioso esfuerzo del pensamiento, realizado desde hace algunos siglos, no es una obra de mero aficionado, útil solamente para «amueblar» la mente y pasar los exámenes, sino una de las bases fundamentales de su profesión.

Prevista para un curso de una Escuela de Radioelectricidad, la obra de J. QUINET está orientada, evidentemente, hacia los campos de aplicación eléctrica. Siento ahora, al leerla, no haberla tenido hace años, cuando preparaba solo en provincias, el examen de la Escuela Superior de Electricidad, extrayendo las matemáticas de un enorme tratado de «Especiales», en el que me sentía incapaz para hacer las selecciones convenientes.

J. QUINET no olvida tampoco la mecánica matemática y establece sólidos fundamentos para los que aspiren a mayores conocimientos.

En efecto, el estudio de las series, el desarrollo de FOURIER nos llevan a las proximidades del cálculo simbólico y no queda mucho camino para recorrer entre las resoluciones presentadas de las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de BESSEL.

Intencionadamente hago alusión a aquellas partes que entran ahora en juego en la técnica del ingeniero de circuitos y de ondas centimétricas. Pero no se puede abarcar en un libro encuadrado dentro de las matemáticas elementales todo el armazón de los cálculos de la física moderna. J. QINET nos conduce a los umbrales de estos campos, dándonos los medios para obtener una solución de la mayor parte de los problemas planteados al ingeniero; nos brinda, al mismo tiempo, excelentes trampolines de partida.

Deseo que nos invite, en complementos ulteriores, a algunas incursiones hacia nuevos horizontes. Todos sus alumnos y amigos le seguirán con interés.

René BARTHÉLEMY.
Miembro de la Academia de Ciencias.

"En el campo de la ciencia, el azar sólo favorece a los espíritus que están preparados."

PASTEUR.

PREFACIO

En el prefacio del Tomo I, hemos dado las características de esta obra, así como el plan general de los seis Tomos de que consta.

En el segundo Tomo de este *Curso Elemental de Matemáticas Superiores,* estudiaremos:

1.° Los desarrollos en serie, y las series;

2.° El cálculo de los complejos;

3.° El cálculo diferencial y algunas de sus aplicaciones. (En los Tomos III y IV se estudian otras aplicaciones del Cálculo Integral.)

El primer Tomo de este curso está consagrado a los complementos de álgebra, al estudio de las derivadas de las diferentes funciones, y a sus aplicaciones, utilizando siempre la notación y' o bien $f'(x)$, *como debe hacerse.* En efecto, ¡es... absurdo utilizar la notación $\frac{dy}{dy}$ para lectores que no saben lo que es una diferencial!

— Repetimos lo que ya dijimos en el prefacio de esta obra: este libro está hecho por un ingeniero, para ingenieros, estudiantes de ingeniería, técnicos, estudiantes y para todas las personas que quieren comprender y *aplicar* y *utilizar* las matemáticas superiores. Por esto, daremos un gran número de aplicaciones.

— Llegado al *cálculo diferencial,* el lector tiene que franquear un obstáculo que habrá sido salvado mediante el primer Tomo. En efecto, el cálculo diferencial sólo puede ser abordado por un espíritu ya preparado, e iremos lentamente al principio, *con objeto de explicar claramente lo que es una diferencial.*

— El *cálculo diferencial e integral* es «la maravilla» de las matemáticas, una maravilla sutil y trascendente, que fue creada en el siglo XVII por NEWTON y LEIBNITZ, aunque existían matemáticas elementales desde hacía cerca de dos mil años.

— Este cálculo, que es la base de todas las técnicas modernas, tiene UN GRAN NÚMERO DE APLICACIONES, y examinaremos todas ellas, esperando así interesar al lector.

— Agradecemos al Sr. CHAUSSIN, Profesor de la Escuela Normal Superior de Enseñanza Técnica, el haber leído este volumen y aconsejado algunas mejoras, y expresamos nuestro vivo reconocimiento a los Sres. GIROUX y DIEUDÉ, ingenieros, que se han encargado de la tarea ingrata de revisar completamente los cálculos y de hacer la segunda corrección de las pruebas.

— Agradecemos también a la Editorial PARANINFO el cuidado meticuloso con el que este libro ha sido editado, así como su perfecta presentación.

J. QUINET.

Nota a la tercera edición francesa

Esta tercera edición incluye numerosas ampliaciones, entre ellas la aplicación de las diferenciales al cálculo de errores en las medidas, con numerosas aplicaciones, la Fórmula de TAYLOR para funciones de dos variables independientes, etc.

Al final del libro aparece también un resumen de todas las fórmulas, *así como más de 700 problemas a resolver y ejercicios, numerados y clasificados por capítulos.* De este modo, el alumno podrá ejercitarse eficazmente, aplicando las teorías del curso, y preparándose para aplicaciones ulteriores.

J. Q.

INDICE DE MATERIAS

PRIMERA PARTE

LOS DESARROLLOS EN SERIE Y LAS SERIES

CAPÍTULO I

Generalidades

1. Objeto del desarrollo en serie de una función ... ... *Pág.* 17
2. Fórmula de MAC-LAURIN 18
3. Ejemplos y aplicaciones 21
4. Fórmula del binomio de NEWTON 31
5. Fórmulas de TAYLOR 34
6. Generalización. Teorema de ROLLE y Teorema de los incrementos finitos 35
7. Ejemplos sobre la fórmula de TAYLOR 39
8. Segunda fórmula de TAYLOR 42
9. Empleo de la fórmula de TAYLOR en aproximaciones numéricas 44
10. Aplicaciones de la fórmula de TAYLOR, para el cálculo de máximos y mínimos 45

CAPÍTULO II

Cálculo de expresiones indeterminadas

11. Primer método 51
12. Segundo método. Regla de L'HOPITAL 52
13. Otras indeterminaciones 57

CAPÍTULO III

Estudio de las series

14. Definiciones y preliminares 61
15. Serie convergente 63
16. Resto de una serie 64
17. Teoremas generales. Propiedad del término general 65
18. Series con términos positivos. Regla de CAUCHY 66

19. Segunda forma de la regla de CAUCHY ... 67
20. Regla de D'ALEMBERT ... 68
21. Segunda forma de la regla de D'ALEMBERT ... 70
22. Comparación de dos series ... 78
23. Series alternadas ... 80
24. Propiedades de las series alternadas ... 82
25. Series con términos cualesquiera ... 84
26. Series enteras ... 85
27. Aplicaciones de la convergencia de series a algunos desarrollos en serie ... 87
28. Derivación de una serie ... 90

SEGUNDA PARTE

LOS COMPLEJOS

CAPÍTULO IV

Generalidades

29. Preliminares ... 91
30. Cómo se introducen los complejos en matemáticas ... 92
31. Preámbulo geométrico sobre los complejos ... 93
32. Vectores simétricos ... 96
33. Algunos cálculos sobre j ... 97
34. Girar un vector en $\pm$ 90° ... 98
35. Segunda forma de representar un vector por un complejo ... 99
36. Girar un vector un ángulo α cualquiera ... 100
37. Tercera forma de escribir la expresión compleja de un vector. 101
38. Representación de una magnitud sinusoidal por un complejo. 103

CAPÍTULO V

Cálculo y utilización de los complejos

39. Igualdad de dos complejos ... 105
40. Suma de dos complejos ... 106
41. Producto de dos complejos ... 109
42. Fórmula de MOIVRE ... 111
43. Cociente de dos complejos ... 113
44. Inverso de un complejo ... 115
45. Potencia de un complejo ... 116
46. Raíz cuadrada de un complejo ... 117
47. Ejercicios diversos ... 118
48. Representación de la derivada de una función sinusoidal por un complejo ... 119
49. Observaciones diversas sobre las exponenciales complejas ... 120

50. Raíces cúbicas y raíces emésimas de un complejo 120
51. Fórmulas de EULER 124
52. Cálculo de $\cos^m x$ y $\text{sen}^m x$ 124
53. Descomposición de sen x y cos x para x complejo 126
54. Lagaritmo de un complejo 127
55. Aplicación eléctrica numérica 127

TERCERA PARTE

CALCULO DIFERENCIAL

CAPÍTULO VI

Preliminares e infinitésimos

56. Preliminares 131
57. Infinitésimos 132
58. Definición de infinitésimo 134
59. Infinitésimos equivalentes 135
60. Orden y parte principal de un infinitésimo 138
61. Teorema sobre la suma de dos infinitésimos 139
62. Teorema sobre el producto de dos infinitésimos 141
63. Teorema sobre el cociente de dos infinitésimos 141
64. Otro método para encontrar el orden y la parte principal de un infinitésimo 142
65. Otro ejemplo de infinitésimo. Longitud de un arco de curva ... 144

CAPÍTULO VII

Las diferenciales

66. Observación sobre los grados de pequeñez 147
67. Definición de diferencial de una función 149
68. Otro modo de definir la diferencial 152
69. Ejemplos de aplicaciones prácticas de las diferenciales 152

CAPÍTULO VIII

Cálculo de diferenciales

70. Cálculo de diferenciales 165
71. Diferencial de una suma, de un producto, de un cociente 166
72. Diferenciales de las funciones de función 167
73. Algunas aplicaciones sencillas de las diferenciales 168
74. Diferencial de una función implícita 174
75. Diferencial de las funciones paramétricas 174
76. Diferencial logarítmica 177

Capítulo IX

Diferenciales de orden superior

77. Diferenciales de orden superior ... 181
78. Ejemplos ... 182
79. Diferencial segunda de las funciones paramétricas ... 185
80. Diferencial segunda de las funciones implícitas ... 187
81. Diferencial segunda de una función de función ... 188

Capítulo X

Otras diferenciales

82. Diferencial de un arco de curva ... 191
83. Caso en que la curva viene dada en coordenadas polares ... 193
84. Diferenciales de las funciones compuestas ... 194
85. Ejemplos ... 196
86. Aplicación al cálculo directo de la diferencial de una función implícita ... 197

Capítulo XI

Diferenciales de las funciones de varias variables independientes y aplicaciones

87. Diferencial total ... 199
88. Demostración de la fórmula de la diferencial total ... 201
89. Ejemplos de diferenciales totales ... 203
90. Aplicaciones radioeléctricas ... 207
91. Aplicaciones de las diferenciales al cálculo de errores en las medidas ... 209
92. Regla del cálculo de errores ... 210
93. Ejemplos prácticos del cálculo de errores ... 212
94. Otra aplicación al péndulo ... 219
95. Diferenciales sucesivas de las funciones de varias variables ... 221
96. Ejemplos de diferenciales sucesivas de funciones de varias variables ... 222
97. Teorema ... 224
98. Observación importante sobre la diferencial total ... 226
99. Diferencial total exacta ... 226
100. Máximo y mínimo de una función de dos variables. Teorema. 228
101. Diferencial segunda de una función compuesta ... 232
102. Función doblemente compuesta ... 234
103. Diferencial segunda total de una función de dos variables independientes ... 236
104. Fórmula de Taylor para las funciones de dos variables ... 238

Capítulo XII

Curvatura de las curvas y radios de curvatura

105. La curvatura de una curva 243
106. Radio de curvatura en punto de una curva 246
107. Observación importante sobre los puntos de inflexión 253
108. Caso de una curva en coordenadas polares 255
109. Círculo osculador 257
110. La verdadera naturaleza del círculo osculador 260

Lista recapitulativa de las Fórmulas del Tomo II 263

Ejercicios y problemas a resolver 271

Sumario del Tomo III 303

PRIMERA PARTE

LOS DESARROLLOS EN SERIE

CAPITULO PRIMERO

GENERALIDADES

1. Objeto del desarrollo en serie de una función. — Sea una función $y = f(x)$, de forma más o menos complicada, y en la cual damos a la variable x, diferentes valores numéricos. En general, será muy difícil, y en todo caso muy largo, el calcular el valor numérico de y.

— Así, por ejemplo, esto ocurrirá para las funciones siguientes:

$$y = \frac{1}{a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1 + e^x},$$

$$y = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^3 x}, \qquad \text{etc.}$$

Por otra parte, frecuentemente será posible poner la función en una forma más sencilla, aunque haya que hacer algunas pequeñas aproximaciones; de este modo se verá mejor lo que ocurre, y, sobre todo, se podrán continuar ciertos cálculos.

Además, por medio de los desarrollos en serie, se podrán calcular fácilmente tablas numéricas. Precisamente por este procedimiento, se han calculado las tablas de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, las líneas trigonométricas hiperbólicas y otras muchas.

— Los desarrollos en serie se basan en el empleo de dos fórmulas, la de MAC-LAURIN y la de TAYLOR.

2. Fórmula de Mac-Laurin. — MAC-LAURIN fue un matemático inglés del siglo XVII, que tuvo la idea de *transformar una función cualquiera, poniéndola bajo la forma de un polinomio en x, ordenado respecto a las potencias crecientes de x.*

La aplicación numérica es de este modo sencilla, ya que dando a x un valor cualquiera, basta con sumar los términos de la forma Ax^m, *sencillos de calcular.* Según la aproximación deseada en el resultado, se tomarán dos, tres o cuatro términos, o más.

— *Naturalmente, un desarrollo de este tipo, solamente tiene interés si los términos del polinomio son cada vez más pequeños, es decir, si son todos decrecientes, y si su suma no es infinita* (se dice que la serie es convergente) (ver página 61).

— Consideremos primero una progresión geométrica de razón r y cuyo primer término es a:

$$a \quad a \cdot r \quad a \cdot r^2 \quad a \cdot r^3 \quad a \cdot r^4 \ldots$$

Sabemos que la suma de los n primeros términos es:

$$S = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r},$$

Si $r > 1$, los términos aumentan cada vez más, y la suma de todos los términos es infinita.

Si $r < 1$ (por ejemplo 1/10), se observa que, si n tiende al infinito r^n tiende hacia cero, por tanto la suma de un número infinito de términos se convierte en:

$$S = a \cdot \frac{1}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}.$$

—Así, por ejemplo, sea la progresión:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots + x^n + \ldots$$

cuya razón es x.

Si $x < 1$, y si $n \to \infty$, tendremos para la suma:

$$S = \frac{1}{1 - x}$$

que es un número determinado. En particular, sea $x = \frac{1}{2}$, la progresión tiene por suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

y, para un número infinito de términos, esta suma es igual a

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Inversamente, la función $y = \frac{1}{1-x}$ podrá ponerse bajo la forma del mismo desarrollo en serie:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \ldots \qquad \text{(para } x < 1\text{)}$$

—La fórmula de MAC-LAURIN, por tanto, tiene como fin generalizar esta propiedad y poner una función cualquiera mediante la forma de un polinomio, ordenado respecto a las potencias crecientes de x. En las aplicaciones prácticas se toman solamente los primeros términos de este polinomio.

Repetimos que este desarrollo en serie no tiene interés más que en el caso en que todos los términos decrecen y tienden hacia cero (y si su suma no es infinita), que es, por otra parte, el caso más general. Estudiaremos en la página 61, el modo de ver si una serie de este tipo es convergente o divergente.

Planteamiento de la fórmula de MAC-LAURIN.

El objetivo es poner una función cualquiera:

$$y = f(x)$$

en la forma de un polinomio en x, tal que:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \ldots + a_n \cdot x^n \ldots$$

donde $a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ son los coeficientes numéricos que tenemos que calcular ahora.

—Podemos preguntarnos si un desarrollo de este tipo es verdaderamente posible y realizable para una función cualquiera; haremos la demostración en la página 36 cuando estudiemos el teorema de los crecimientos finitos y veremos que sí es realmente posible.

—Para calcular los coeficientes sucesivamente, la función:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots$$
$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \ldots$$
$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4x + 60a_5x^2 + \ldots$$
$$f''''(x) = 24a_4 + 120a_5x + \ldots.$$

En todas estas expresiones, incluida la función «madre» $y = f(x)$, hagamos en los dos miembros $x = 0$, lo cual se escribirá simbólicamente $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, etc., con lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} f\ (0) &= a_0 & f'''\ (0) &= 6a_3 \\ f'\ (0) &= a_1 & f''''(0) &= 24a_4 \\ f''(0) &= 2a_2 & &\vdots \end{aligned}$$

de donde sacamos:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0) \\ a_1 &= f'(0) \quad \text{o sea} \quad \frac{f'(0)}{1} \\ a_2 &= \frac{f''(0)}{2} \quad \text{o sea} \quad \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} \\ a_3 &= \frac{f'''(0)}{6} \quad \text{o sea} \quad \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ a_4 &= \frac{f''''(0)}{24} \quad \text{o sea} \quad \frac{f''''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

y

$$a_n = \frac{f^n(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n}.$$

Pero como todos estos denominadores son largos y molestos de escribir y enunciar, utilizaremos la notación simbólica siguiente:

$1 \cdot 2$	se escribe $2!$	y se pronuncia «*factorial* 2»
$1 \cdot 2 \cdot 3$	se escribe $3!$	y se pronuncia «*factorial* 3»
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n$	se escribe $n!$	y se profuncia «*factorial* n»

— Tendremos, por tanto $(1! = 1)$:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0) & a_3 &= \frac{f'''(0)}{3!} \\ a_1 &= \frac{f'(0)}{1!} & &\vdots \\ a_2 &= \frac{f''(0)}{2!} & a_n &= \frac{f^n(0)}{n!}. \end{aligned}$$

Si sustituimos estos valores en la función y, puesta en la forma de polinomio en x, escrito al comienzo de este párrafo, tenemos:

$$y = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{n!} \cdot x^3 + \ldots \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n + \ldots$$

que escribiremos mejor por la forma simétrica siguiente que constituye la **Fórmula de Mac-Laurin:**

$$y = f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \frac{x^3}{3!} \cdot f'''(0) + \frac{x^4}{4!} \cdot f''''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot f^n(0) \ldots$$

Esta fórmula podrá, por otra parte, derivarse o también integrarse.

—Haremos ahora numerosas aplicaciones y señalamos que en el capítulo *Estudio de las series* estudiaremos la convergencia o la divergencia de este desarrollo en serie.

3. Ejemplos y aplicaciones. — 1.° *Desarrollar en serie* $y = e^x$, *deducir después el valor de e, haciendo* $x = 1$.

Por claridad, deberemos disponer los cálculos **obligatoriamente** *de este modo:*

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = e^0 = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = e^0 = 1. \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Tendremos, por tanto:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} \cdot 1 + \frac{x^2}{2!} \cdot 1 + \frac{x^3}{3!} \cdot 1 \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot 1 \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \ldots.$$

Hagamos ahora $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots \frac{1}{n!}$$

y así, tomando un número suficiente de términos, se calcula:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = 2{,}718281828\ldots.$$

Si hacemos, por ejemplo $x = \frac{1}{3}$ tendríamos:

$$e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{162} + \ldots = 1{,}3956.$$

Del mismo modo, tendríamos:

$$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \ldots = 1{,}64.$$

Vemos así la utilidad de los desarrollos en serie para las aplicaciones numéricas.

2.° Desarrollar $y = e^{-Kx}$.

Tenemos:

$$\begin{aligned}
&f\ (x) = e^{-Kx} && f\ (0) = e^{-0} = \frac{1}{e^0} = 1\\
&f'\ (x) = -K \cdot e^{-Kx} && f'\ (0) = -K \cdot 1 = -K\\
&f''\ (x) = +K^2 \cdot e^{-Kx} && f''\ (0) = +K^2\\
&f'''\ (x) = -K^3 \cdot e^{-Kx} && f'''\ (0) = -K^3\\
&f''''(x) = +K^4 \cdot e^{-Kx} && f''''(0) = +K^4.\\
&\quad\vdots && \quad\vdots
\end{aligned}$$

Se tendrá, por tanto:

$$e^{-Kx} = 1 + \frac{x}{1!}(-K) + \frac{x^2}{2!} \cdot K^2 + \frac{x^3}{3!}(-K^3) + \frac{x^4}{4!} \cdot K^4 \ldots$$

$$= 1 - Kx + \frac{K^2x^2}{2!} - \frac{K^3x^3}{3!} + \frac{K^4x^4}{4!} \ldots.$$

Así, por ejemplo, para $K = 0{,}1$ tendremos:

$$e^{-0{,}1x} = \frac{1}{e^{\frac{x}{10}}} = 1 - \frac{x}{10} + \frac{x^2}{200} - \frac{x^3}{6.000} + \ldots.$$

3.° *Desarrollar* $y = \text{Log}\,(1 + x)$.

Tenemos:

$$\begin{aligned}
f\ (x) &= \text{Log}\,(1+x) & f\ (0) &= \text{Log}\,(1+0) = \text{Log}\,1 = 0\\
f'\ (x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} & f'\ (0) &= 1\\
f''\ (x) &= -(1+x)^{-2} & f''\ (0) &= -1\\
f'''\ (x) &= 2(1+x)^{-3} & f'''\ (0) &= 2\\
f''''(x) &= -6(1+x)^{-4} & f''''(0) &= -6.\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Se tendrá, por tanto:

$$\begin{aligned}
\text{Log}\,(1+x) &= 0 + \frac{x}{1!}\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}\cdot 2 + \frac{x^4}{4!}(-6) + \ldots\\
&= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.
\end{aligned}$$

Veremos en la página 88, que este desarrollo no es convergente (es decir, que la suma de todos sus términos no es finita) más que cuando:

$$-1 < x < 1.$$

Calculemos, por ejemplo, Log 1,5, haciendo $x = 0{,}5$:

$$\begin{aligned}
\text{Log}\,1{,}5 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\ldots\\
&= 0{,}416.
\end{aligned}$$

Vemos que para obtener varios decimales exactos, tendríamos que tomar muchos términos.

4.° *Desarrollar* $y = \text{sen}\,x$.

Tenemos:

$$\begin{aligned}
f\ (x) &= \text{sen}\,x & f\ (0) &= \text{sen}\,0 = 0\\
f'\ (x) &= \cos x & f'\ (0) &= 1\\
f''\ (x) &= -\text{sen}\,x & f''\ (0) &= 0\\
f'''\ (x) &= -\cos x & f'''\ (0) &= -1\\
f''''\ (x) &= \text{sen}\,x = y & f''''\ (0) &= 0\\
f'''''(x) &= \cos x = y' & f'''''(0) &= 1.\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Tendremos, por tanto:

$$\operatorname{sen} x = 0 + \frac{x}{1!} \cdot 1 + \frac{x^2}{2!} \cdot 0 + \frac{x^3}{3!}(-1) + \frac{x^4}{4!}(0) + \frac{x^5}{5!} \cdot 1 + \ldots$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}$$

Naturalmente, x debe de expresarse en radianes (no en grados) ya que $\operatorname{sen} x$ es una línea trigonométrica (o una razón), y debe de serlo igualmente en los dos miembros de la ecuación.

Calculemos por ejemplo $\operatorname{sen} 1^{rd}$, haciendo $x = 1$ (un radián $\simeq 57°$):

$$\operatorname{sen}\ 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \ldots = 1 - 0{,}166 + 0{,}008 \ldots = 0{,}8414 \ldots$$

5.° *Desarrollar* $y = \cos x$.

Tenemos:

$$\begin{array}{ll} f\ (x) = \cos x & f\ (0) = \cos 0 = 1 \\ f'\ (x) = -\operatorname{sen} x & f'\ (0) = 0 \\ f''\ (x) = -\cos x & f''\ (0) = -1 \\ f'''\ (x) = \operatorname{sen} x & f'''\ (0) = 0 \\ f''''\ (x) = \cos x = y & f''''\ (0) = 1 \\ f'''''(x) = -\operatorname{sen} x = y' & f'''''(0) = 0. \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Se tendrá, por tanto:

$$\cos x = 1 + \frac{x}{1!} \cdot 0 + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!} \cdot 0 + \frac{x^4}{4!} \cdot 1 + \ldots$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots}$$

Vemos así, la ley de formación de los términos. Con estas dos fórmulas se han construido las tablas numéricas del seno y del coseno.

NOTA. — Podemos ver que el desarrollo de $\cos x$ es la derivada

término a término de $\operatorname{sen} x$. En efecto, derivando el desarrollo de $\operatorname{sen} x$, se obtiene

$$1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \ldots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots = \cos x.$$

c. q. d.

6.° *Desarrollar* $y = \operatorname{sen}^2 x$.

$$\begin{aligned} f\ (x) &= \operatorname{sen}^2 x = u^2 & f\ (0) &= \operatorname{sen}^2 0 = 0 \\ f'\ (x) &= 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} 2x & f'\ (0) &= 0 \\ f''\ (x) &= 2 \cos 2x & f''\ (0) &= 2 \\ f'''\ (x) &= -4 \operatorname{sen} 2x & f'''\ (0) &= 0 \\ f''''(x) &= -8 \cos 2x & f''''(0) &= -8. \\ &\vdots & &\vdots \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Se tendrá, por tanto:

$$y = \operatorname{sen}^2 x = 0 + \frac{x}{1!} \cdot 0 + \frac{x^2}{2!} \cdot 2 + \frac{x^3}{3!} \cdot 0 + \frac{x^4}{4!} \cdot (-8) + \ldots$$

$$= x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \frac{32x^6}{6!} \ldots.$$

7.° *Desarrollar* $y = \operatorname{arc\,sen} x$.

Tenemos:

$f\ (x) = \operatorname{arc\,sen} x$

$$f'\ (x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'\ (0) = 1$$

$$f''\ (x) = -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = +x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad f''\ (0) = 0$$

$$f'''(x) = (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 1 + x\left(-\frac{3}{2}\right)(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x) \qquad f'''(0) = 1.$$

Se tendrá, por tanto (y damos el término siguiente, en x^5):

$$\operatorname{arc\,sen} x = 0 + \frac{x}{1!} \cdot 1 + \frac{x^2}{2!} \cdot 0 + \frac{x^3}{3!} \cdot 1 + \ldots = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3x^5}{4 \cdot 5} + \ldots.$$

Podemos servirnos de este desarrollo para calcular el valor de π. En efecto, hagamos $x = \frac{1}{2}$:

$$\text{arc sen } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots$$

de donde:

$$\pi = 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \ldots\right) = 3{,}14159\ldots$$

8.° *Desarrollar* $y = xe^{-x}$.

Tenemos:

$$\begin{array}{ll} f(x) = xe^{-x} & f(0) = 0 \\ f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x) & f'(0) = 1 \\ f''(x) = (1-x)(-e^{-x}) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(-2) & f''(0) = -2. \end{array}$$

Se tendrá, por tanto:

$$xe^{-x} = 0 + \frac{x}{1!} \cdot 1 + \frac{x^2}{2!} \cdot (-2) + \ldots = x - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \ldots.$$

9.° *Desarrollar* $y = \text{sen } mx$.

Tenemos:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \text{sen } mx & f(0) = 0 \\ f'(x) = m \cos mx & f'(0) = m \\ f''(x) = -m^2 \text{ sen } mx & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -m^3 \cos mx & f'''(0) = -m^3 \\ f''''(x) = m^4 \text{ sen } mx & f''''(0) = 0 \\ f'''''(x) = m^5 \cos mx & f'''''(0) = m^5 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Se tendrá, por tanto:

$$\text{sen } mx = 0 + \frac{x}{1} \cdot m + \frac{x^2}{2!} \cdot + \frac{x^3}{3!}(-m^3) + \frac{x^4}{4!} \cdot 0 + \frac{x^5}{5!} \cdot m^5 + \ldots$$

$$= mx - \frac{m^3}{3!}x^3 + \frac{m^5}{5!}x^5 + \ldots.$$

10. *Desarrollar* $y = \sqrt{1 + x^3}$.

Tenemos:

$$f\ (x) = \sqrt{1 + x^3} = (1 + x^3)^{\frac{1}{2}} \qquad f\ (0) = 1$$

$$f'\ (x) = \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'\ (0) = 0$$

$$f''\ (x) = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(1 + x^3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$$

$$= (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^3(1 + x^3)^{-\frac{3}{2}} \qquad f''\ (0) = 1$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x^3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x - [(1+x^3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x +$$

$$+ x^3\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x^3)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x] \qquad f'''(0) = 0.$$

Se tendrá, por tanto (y damos los términos que se encuentran después de los que acabamos de calcular):

$$\sqrt{1 + x^3} = 1 + \frac{x}{1!} \cdot 0 + \frac{x^2}{2!} \cdot 1 + \frac{x^3}{3!} \cdot 0 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} x^6 - \ldots$$

Del mismo modo encontraríamos:

$$\sqrt{1 - x^3} = 1 - \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} x^6 - \ldots$$

Estudiaremos más adelante la convergencia de estas series.

Si $x \ll 1$, se puede despreciar el tercer término en x^4 respecto al término en x^3, y nos queda:

$$\boxed{\sqrt{1 + x^3} \approx 1 + \frac{x^3}{2}}$$

y

$$\boxed{\sqrt{1 - x^3} \approx 1 - \frac{x^3}{2}}$$

Observaremos, por otra parte, en este último caso, que la cantidad bajo el signo radical sólo es positiva cuando $-1 < x < 1$.

Así, por ejemplo:

$$\sqrt{1-0{,}1^2} = \sqrt{0{,}99} = 1 - \frac{0{,}1^2}{2} = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$$

$$\sqrt{1+0{,}1^2} = \sqrt{1{,}01} = 1 + \frac{0{,}1^2}{2} = 1 + 0{,}005 = 1{,}005.$$

11. *Desarrollar* $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Tenemos:

$$f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}(-1) - x\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$$

$$= -(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = +\frac{3}{2}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x$$

$$+ (1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 6x + 3x^2\left(-\frac{5}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{7}{2}} \cdot 2x \qquad f'''(0) = 0.$$

Se tendrá, por tanto (y damos los términos posteriores a los que acabamos de calcular):

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots.$$

Del mismo modo, continuando el desarrollo encontraríamos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots.$$

Por tanto, si x es mucho más pequeño que 1, se pueden despreciar los términos en x^4 respecto a los términos en x^2 y escribir:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$$

Así, sea $x = 0{,}1$, tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1+0{,}1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}01}} = 1 - \frac{0{,}1^2}{2} = 1 - 0{,}005 = 0{,}995.$$

Aplicación eléctrica. Transformar $\dfrac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$.

Tenemos:

$$\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} = \frac{L\omega}{\sqrt{L^2\omega^2\left(1+\frac{R^2}{L^2\omega^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{L^2\omega^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

supongamos $\dfrac{R}{L\omega} < 1$, nos queda por tanto:

$$1 - \frac{x^2}{2} = \left(1 - \frac{R^2}{2L^2\omega^2}\right).$$

Vemos que se evita así el cálculo de una raíz cuadrada y de una suma de dos cuadrados.

— En electricidad, una aplicación de estas fórmulas es el cálculo de la capacidad de un condensador tubular, o en radio, en los cálculos de la selectividad de un circuito oscilante. Por ejemplo, la expresión $\dfrac{1}{1+\frac{\Delta C}{C}}$ puede reemplazarse, como hemos visto al principio de este capítulo en los desarrollos en serie de $\dfrac{1}{1-x}$, por:

$$\frac{1}{1+\frac{\Delta C}{C}} = 1 - \frac{\Delta C}{C}. \qquad \text{(donde } \Delta C \ll C\text{)}.$$

Se comprende que los cálculos queden muy simplificados.

Aplicación a la curva catenaria.

La catenaria es la curva que forma un hilo flexible pesado, sujeto en sus dos extremidades y que cuelga bajo la acción de su propio peso. Es la curva que forman las líneas eléctricas aéreas.

— Más adelante calcularemos la ecuación de esta curva y encontraremos:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Es decir, la presencia de la exponencial hace difícil los cálculos numéricos; es más práctico utilizar los desarrollos en serie de MAC-LAURIN. Se tendrá, por tanto:

$$f\ (x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad f\ (0) = a$$

$$f'\ (x) = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad f'\ (0) = 0$$

$$f''\ (x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad f''\ (0) = \frac{1}{a}$$

$$f'''\ (x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a^2}e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad f'''\ (0) = 0$$

$$f''''\ (x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^3}e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{a^3}e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad f''''\ (0) = \frac{1}{a^3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

La fórmula de MAC-LAURIN nos da:

$$y = a + \frac{x}{1!}\cdot 0 + \frac{x^2}{2!}\cdot\frac{1}{a} + \frac{x^3}{3!}\cdot 0 + \frac{x^4}{4!}\cdot\frac{1}{a^3} + \ldots$$

$$= a\left(1 + \frac{x^2}{2!a^2} + \frac{x^4}{4!a^4} + \ldots\right).$$

Si x no es muy grande, nos conformamos con los dos primeros términos:

$$y = a\left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right) = \frac{x^2}{2a} + a,$$

que es, por tanto, una parábola. Es decir, en primera aproximación, podemos asimilar la catenaria a una parábola.

En el tomo III (Cálculo Integral) estudiaremos la catenaria en detalle, y calcularemos la longitud del hilo, para una posición dada, así como la flecha producida por el hilo.

4. Fórmula del binomio de Newton. — Esta fórmula nos permitirá calcular el desarrollo de $(a + b)^m$ o bien $(a - b)^m$, donde m es positivo, negativo, entero o fraccionario.

La fórmula de MAC-LAURIN nos permite esto. En efecto, desarrollemos la función:

$$y = (a + x)^m.$$

Tendremos:

$$f\ (x) = (a + x)^m \qquad f\ (0) = a^m$$
$$f'\ (x) = m(a + x)^{m-1} \qquad f'\ (0) = ma^{m-1}$$
$$f''\ (x) = m(m - 1)\ (a + x)^{m-2} \qquad f''\ (0) = m(m - 1)a^{m-2}$$
$$f'''(x) = m(m - 1)\ (m - 2)\ (a + x)^{m-3} \qquad f'''(0) = m(m - 1)(m - 2)a^{m-3}.$$

— La fórmula de MAC-LAURIN nos da:

$$(a+x)^m = a^m + \frac{x}{1!} \cdot ma^{m-1} + \frac{x^2}{2!} \cdot m(m-1)a^{m-2} + \frac{x^3}{3!} m(m-1)\ (m-2)a^{m-3} \ldots$$

que de otro modo se escribirá:

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1!} a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2}x^2 + \frac{m(m-1)\ (m-2)}{3!} a^{m-3}x^3 + \ldots$$

El desarrollo se para automáticamente cuando se llega al factor $m - m$. Observaremos que los exponentes de m disminuyen en una unidad, al pasar al término siguiente, mientras que el exponente de x aumenta en una unidad; en resumen, cada término de esta serie es de grado m.

Basta ahora reemplazar x por b para tener la *fórmula del binomio de* NEWTON.

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1!} \cdot a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)\ (m-2)}{3!} a^{m-3}b^3 + \cdots$$

Para $(a - b)^m$ se observa que todas las potencias impares de b son negativas; por ello, los signos + y — se alternan.

Ejemplos:

$$1^{o}\quad (a+b)^5 = a^5 + \frac{5}{1}a^4b + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}a^3b^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}a^2b^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot ab^4 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

$$2^{o}\quad (a-b)^6 = a^6 - \frac{6}{1}a^5b + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}a^4b^2 - \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^2b^4 - \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}ab^5 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}b^6$$
$$= a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

NOTA: En el primer tomo hemos indicado otro procedimiento para calcular $(a \pm b)^m$ por medio del triángulo de PASCAL, que es mucho más práctico, pero solamente para m entero y positivo.

3.° *Calcular* $\sqrt{1+x}$ o bien $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Tendremos, recordando que cualquier potencia de 1, positiva o negativa, es siempre igual a 1:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3 \ldots$$
$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \ldots.$$

Del mismo modo se tendría:

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 - \frac{(-1)}{1!}x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 - \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \ldots$$

o bien $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n \ldots.$$

Inversamente, la suma de esta progresión geométrica de razón x (que debe de ser < 1, si no la suma sería infinita) es igual, como sabemos, a:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$$

Finalmente, por la fórmula del binomio se podría calcular $(1+x^2)^m$, cualquiera que sea m, positivo, entero o fraccionario.

4.° *Cálculo de* $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ *para* $m=\infty$.

Partamos del desarrollo de $(a+x)^m$ de la página 31, y reemplacemos a por 1:

$$(1+x)^m = 1 + m\frac{x}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \ldots,$$

después sustituyamos x por $\frac{1}{m}$, lo cual nos da:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1!}\frac{1}{m} + \frac{1}{2!m^2}m(m-1) + \frac{1}{3!m^3}m(m-1)(m-2) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \ldots.$$

y, si m tiende hacia infinito, queda:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots,$$

encontramos así, la serie e (Ver página 21). En resumen, si $m \to \infty$, se tiene:

$$\boxed{\text{límite}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e}$$

Esta expresión nos ha servido, en el Tomo I, para el cálculo de la derivada de la función exponencial, pero este cálculo constituye la demostración rigurosa.

NOTA IMPORTANTE.

Si, en la fórmula del binomio, m es un número entero y positivo, se obtiene un polinomio con $(m+1)$ términos, ya que las derivadas de orden superior a $m+1$ son nulas. Pero si m es un número negativo o fraccionario, se obtiene un polinomio que tiene un número infinito de términos, como hemos visto antes, y si en la expresión $(1+x)^m$, tenemos $x>1$, su suma es evidentemente infinita; en este caso, este desarrollo sólo tiene, por tanto, interés cuando $x<1$. Esto será objeto de un estudio más detallado, como veremos más adelante, cuando examinemos la convergencia de las series.

5. Fórmula de Taylor. — Establezcamos primero la célebre fórmula de TAYLOR. Veremos después lo que significa y para qué sirve.

Sea una curva $y = f(x)$, continua, que podemos desarrollar en serie de MAC-LAURIN.

— Coloquémonos en un punto cualquiera de la curva, de abscisa x y hagamos:

$$x = a + h,$$

a será, por tanto, una abscisa precedente, *conocida,* y h será un incremento cualquiera, *conocido* (grande o pequeño). Pongamos la función en la forma de un polinomio en x (como era nuestro objetivo al establecer la fórmula de MAC-LAURIN):

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \ldots \\ &= a_0 + a_1(a+h) + a_2(a+h)^2 + a_3(a+h)^3 + \ldots \\ &= (a_0 + a_1a + \ldots) + h(a_1 + 2aa_2 + \ldots) \\ &\qquad + h^2(a_2 + 3aa_3 + \ldots) + h^3(a_3 + \ldots) + \ldots. \end{aligned}$$

Cada uno de estos paréntesis es una suma de constantes, que podemos designar de un modo más sencillo por otra constante: la primera por b_0, la segunda por b_1, la tercera por b_2, etc., lo cual nos da:

$$y = b_0 + hb_1 + h^2b_2 + h^3b_3 + \ldots$$

o bien, como $h = x - a$,

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + b_4(x-a)^4 + \ldots$$

Derivando:

$$\begin{aligned} f'(x) &= b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + 4b_4(x-a)^3 + \ldots \\ f''(x) &= 2b_2 + 6b_3(x-a) + 12b_4(x-a)^2 + \ldots \\ f'''(x) &= 6b_3 + 24b_4(x-a) + \ldots \\ f''''(x) &= 24b_4 + \ldots. \\ &\vdots \qquad \vdots \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

Hagamos ahora $x = a$ en todas estas expresiones, lo cual anula todos estos paréntesis:

$$\begin{aligned} f(a) &= b_0 & f'''(a) &= 6b_3 \\ f'(a) &= b_1 & f''''(a) &= 24b_4 \\ f''(a) &= 2b_2 & \vdots &\quad \vdots \\ & & \vdots &\quad \vdots \end{aligned}$$

de donde sacamos:

$$b_0 = f(a) \qquad b_3 = \frac{f'''(a)}{6} = \frac{f'''(a)}{3!}$$

$$b_1 = \frac{f'(a)}{1!} \qquad b_4 = \frac{f''''(a)}{24} = \frac{f''''(a)}{4!}.$$

$$b_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!}. \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Sustituyendo en la fórmula inicial:

$$f(a+h) = b_0 + hb_1 + h^2b_2 + h^3b_3 + \ldots$$

$$= f(a) + h \cdot \frac{f'(a)}{1!} + h^2 \cdot \frac{f''(a)}{2!} + h^3 \cdot \frac{f'''(a)}{3!} + h^4 \cdot \frac{f''''(a)}{4!} + \ldots$$

que escribiremos mejor bajo la forma:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) + \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(a) + \frac{h^4}{4!} \cdot f''''(a) + \cdots$$

Esta es la primera fórmula de TAYLOR (existe una segunda).

Esta fórmula tiene varias aplicaciones que veremos poco a poco, más adelante. Examinaremos ahora la principal: *la fórmula permite, conociendo el valor $f(a)$ de una función para $x = a$, calcular rigurosamente el nuevo valor $f(a + h)$ de esta función, cuando se da a un incremento h cualquiera, conocido, pequeño o grande* (fig. 1). Naturalmente, según la aproximación deseada, se tomarán dos o tres términos, o más, en la fórmula de TAYLOR.

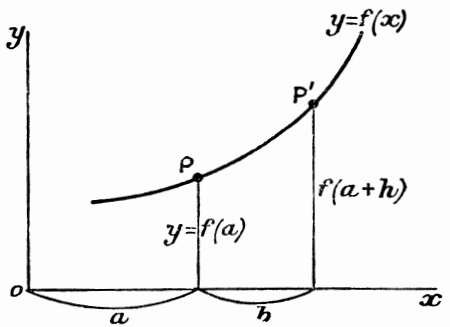

FIG. 1

OBSERVACIÓN: La fórmula se aplica además para valores de h negativos y daría $f(a - h)$.

6. Generalización. — Antes de hacer ejemplos numéricos, es necesario generalizar y demostrar que la fórmula de TAYLOR, y, en con-

secuencia, la de MAC-LAURIN, pueden aplicarse, en realidad, a una función cualquiera, siempre que sea continua y que sus derivadas existan.

— Con este objetivo, utilizamos los dos teoremas siguientes.

TEOREMA DE ROLLE. — *Si una función* $y = f(x)$ *se anula para* $x = a$ *y para* $x = b$, *y admite derivada en el intervalo (es decir, en suma, si la función es continua), la derivada se anula en el intervalo ab para un valor* $x = c$.

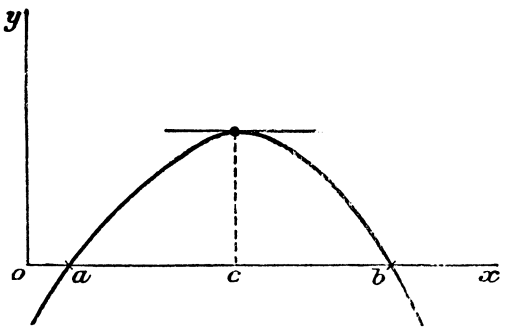

FIG. 2

Daremos tan sólo una demostración geométrica de este teorema, que es evidente según la figura 2.

Se ve, en efecto, que, puesto que la función es continua, si se anula para $x = a$ y $x = b$, es necesario que entre estos dos valores, la función pase por un máximo o por un mínimo, para $x = c$ por ejemplo, en cuyo caso, la derivada se anula (la tangente a la curva es horizontal en este punto).

Podemos decir también, que entre dos raíces de la función $y = f(x)$, hay *al menos* una raíz de su derivada y' tal que:

$$y' = 0.$$

Este teorema, sirve también, en la teoría de ecuaciones, para calcular sus raíces.

TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS. — *Si una función* $y = f(x)$ *posee una derivada entre* $x = a$ *y* $x = b$, *existe siempre una abscisa c comprendida entre a y b, tal que*:

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)}$$

Suponemos que la función es continua entre a y b.

Se puede además escribir, haciendo:

$b = a + h$ y $c = a + \theta \cdot h$ (siendo $\theta < 1$ y donde θ es desconocido).

$$\boxed{f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(a + \theta \cdot h)}$$

Daremos dos demostraciones: la primera, algebraica, y la segunda, puramente geométrica.

1.° *Demostración algebraica.*

Consideremos que la expresión $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, es un número, desconocido por el momento, y que llamaremos A, lo cual nos da:

$$f(b) - f(a) - A(b - a) = 0.$$

Consideremos ahora la función:

$$(x) = f(x) - f(a) - A \cdot (x - a) = 0.$$

El teorema de ROLLE puede aplicarse, ya que:

$$\varphi(a) = 0 \qquad \text{y} \qquad \varphi(b) = 0$$

y

$$\varphi'(x) = f'(x) - A.$$

Como $f'(x)$ no es infinito por hipótesis, $\varphi'(x)$ tampoco lo es y el teorema es aplicable; hay, por tanto, un valor $x = c$ para el cual nemos:

$$\varphi'(c) = 0$$

es decir:

$$A = f'(c) \qquad \text{o sea} \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

c.q.d.

Observaremos que esta fórmula recuerda la definición de la derivada, pero aquí tenemos una razón en la cual los dos incrementos, el numerador y el denominador no son variables, ni tienden hacia cero, *son finitos*. De ahí el nombre del teorema.

2.° *Demostración geométrica.*

Es evidente, según la figura 3.

Sean los puntos A y B correspondientes a a y b. Tracemos la recta AB y la recta AD. La figura muestra que, entre A y B, existe, necesariamente, un punto C (de abscisa c, o bien $a + \theta \cdot h$), donde la tangente a la curva es paralela a AB, por tanto tiene la misma pendiente que la última, o sea:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha.$$

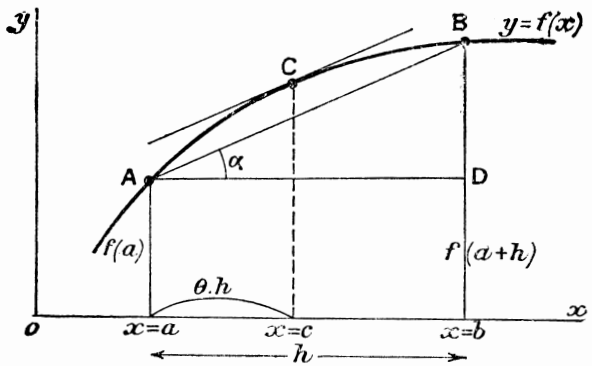

FIG. 3

La pendiente en C es la derivada de la función en la cual hacemos $x = c$.

Por otra parte, tenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(c),$$

de donde deducimos:

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(c) = h \cdot f'(a + \theta h). \qquad (1)$$

o bien:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

c.q.d.

Hay que señalar que la abscisa c es desconocida. Todo lo que podemos decir es *que dicha abscisa existe.*

—Pero la derivada $f'(x)$ es una función de x, *se puede, por tanto, aplicarle el mismo teorema,* lo cual nos da, llamando α a un número desconocido más pequeño que 1:

$$f'(a + \theta \cdot h) = f'(a) + \theta \cdot h \cdot f''(a + \alpha \cdot \theta h).$$

Sustituyamos este valor en la ecuación (1) transformada:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h \cdot f'(a + 0 \cdot h) \\ &= f(a) + h[f'(a) + 0 \cdot h \cdot f''(a + \alpha \cdot 0h)] \\ &= f(a) + h \cdot f'(a) + 0 \cdot h^2 f''(a + \alpha \cdot 0h). \end{aligned} \qquad (2)$$

Pero $f''(x)$ es también una función de x, a la cual aplicaremos el mismo teorema cuando $x = a + \alpha \cdot 0h$; lo cual nos da, llamando β a un número desconocido < 1:

$$f''(a + \alpha 0h) = f''(a) + \alpha 0h \cdot f'''(a + \beta \cdot \alpha 0h).$$

Sustituyamos en la ecuación (2), lo cual nos da:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h \cdot f'(a) + 0h^2 \cdot [f''(a) + \alpha 0h \cdot f'''(a + \beta\alpha 0h)] \\ &= f(a) + h \cdot f'(a) + 0h^2 \cdot f''(a) + \alpha 0^2 \cdot h^3 \cdot f'''(a + \beta\alpha 0h) \quad \text{etc...} \end{aligned}$$

Vemos así aparecer los primeros términos de una serie de la misma naturaleza que los de la fórmula de TAYLOR:

$$h \cdot f'(a) \qquad h^2 \cdot f''(a) \qquad h^3 \cdot f'''(a) \qquad \text{etc.}$$

—En resumen, este teorema, que es una evidencia geométrica, independiente de la naturaleza de la función, *siempre que no sea infinita y que las derivadas existan,* nos prueba que la fórmula de TAYLOR es muy general y que una función cualquiera, que cumpla las anteriores condiciones, puede siempre desarrollarse en serie de TAYLOR, y, por tanto, también en serie de MAC-LAURIN.

7. Ejemplos sobre la fórmula de Taylor. — 1.° *Calcular* sen 61°, *conociendo* sen $60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Tenemos

$$f(a) = \text{sen } 60° \quad \text{y} \quad f(a+h) = \text{sen } 61°$$

$$\alpha = 60° \text{ o sea: } \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad h = 1° \text{ o bien } \frac{\pi}{180} \text{ radianes.}$$

Pero como hay que calcular derivadas, *es necesario precisar* cuál es la función que se estudia. Aquí es:

$$y = \text{sen } x.$$

Dispondremos los cálculos, *claramente*, del modo siguiente, ya que en cada derivada hay que hacer $x = a = 60°$:

$$f\ (x) = \operatorname{sen} x \quad \to \quad f\ (a) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'\ (x) = \cos x \quad \to \quad f'\ (a) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$f''\ (x) = -\operatorname{sen} x \quad \to \quad f''\ (a) = -\operatorname{sen} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad \to \quad f'''(a) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Tendremos, por tanto:

$$\operatorname{sen} 61° = f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}\cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!}\cdot f''(a) + \ldots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\left(-\frac{1}{2}\right) + \ldots$$

$$= 0{,}866 + \frac{\pi}{180}\cdot 0{,}5 - \left(\frac{\pi}{180}\right)^2\cdot\frac{0{,}866}{2} - \left(\frac{\pi}{180}\right)^3\cdot\frac{0{,}5}{6} + \ldots$$

$$= 0{,}8746 \ldots.$$

2.° *Calcular* $\sqrt[3]{1{,}2}$.

La función a derivar es, evidentemente:

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

con

$$a = 1 \qquad h = 0{,}2.$$

Tenemos:

$$f(a) = \sqrt[3]{1} = 1 \qquad \text{y} \qquad f(a+h) = \sqrt[3]{1{,}2}$$

Tendremos, recordando que 1 elevado a una potencia cualquiera es igual a 1:

$$f\ (x) = x^{\frac{1}{3}} \qquad f\ (a) = \sqrt{1} = 1$$

$$f'\ (x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \qquad f'\ (a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3}$$

$$f''\ (x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \qquad f''\ (a) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{1^5}} = -\frac{2}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} \qquad f'''(a) = \frac{10}{27}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Tendremos, por tanto:

$$f(a+h) = \sqrt[3]{1{,}2} = 1 + \frac{0{,}2}{1!}\cdot\frac{1}{3} + \frac{0{,}2^2}{2!}\left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{0{,}2^3}{3!}\cdot\frac{10}{27} + \ldots$$

$$= 1 + 0{,}066 - 0{,}004 + \ldots = 1{,}062.$$

3.° *Calcular* $e^{0{,}3}$.

La función a derivar es, evidentemente, $y = e^x$, siendo:

$$f(a) = e^1 = e \quad \text{y} \quad f(a-h) = e^{0{,}3}$$

aquí:

$$h = -0{,}7 \quad \text{y} \quad a = 1.$$

Tendremos, por tanto:

$$f\ (x) = e^x \ \rightarrow\ f\ (a) = e^1 = e$$
$$f'\ (x) = e^x \qquad f'\ (a) = e$$
$$f''(x) = e^x \qquad f''(a) = e \qquad \text{etc.}$$

Lo cual da, *para h negativo:*

$$f(a-h) = e^{0{,}3} = e - \frac{0{,}7}{1!}\cdot e + \frac{0{,}7^2}{2!}\cdot e - \frac{0{,}7^3}{3!}\cdot e + \ldots$$

$$= e - 0{,}7e + 0{,}245e - 0{,}057e$$
$$= e(1 - 0{,}7 + 0{,}245 - 0{,}057 + \ldots)$$
$$= 0{,}488e = 1{,}33 \text{ (con 4 términos)}$$
$$= 0{,}496e = 1{,}35 \text{ (con 6 términos).}$$

4.° *Calcular* $\frac{1}{101}$.

Tenemos $f(a) = \frac{1}{100}$ y $f(a+h) = \frac{1}{101}$

siendo:

$$a = 100 \qquad h = 1.$$

La función a derivar es:

$$y = f(x) = \frac{1}{x}.$$

Tendremos, por tanto:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(a) = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} \qquad f'(a) = -\frac{1}{10^4} = -0{,}0001$$

$$f''(x) = 2x^{-3} \qquad f''(a) = \frac{2}{100^3} = 0{,}000002.$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

De donde:

$$\frac{1}{101} = f(a+h) = \frac{1}{100} + 1\left(-\frac{1}{10^4}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{100^3}\right) + \ldots$$
$$= 0{,}01 - 0{,}001 + 0{,}000001 + \ldots$$
$$= 0{,}009901 \approx 0{,}0099.$$

8. Segunda fórmula de Taylor. — En la fórmula inicial teníamos:

$$x = a + h \quad \text{de donde} \quad h = x - a.$$

Sustituyamos por tanto, h por $(x-a)$ en esta fórmula, lo cual nos da:

$$f(a+h)=f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}\cdot f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}\cdot f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}\cdot f'''(a)+\ldots$$

Esta es la segunda forma de la fórmula de TAYLOR.

— Esta fórmula tiene por objeto desarrollar una función cualquiera en la forma de un polinomio ordenado respecto a las potencias crecientes de $(x-a)$ donde a es un número o un coeficiente cualquiera, que se da en cada caso particular.

Ejemplos:

1.° *Desarrollar* Log x *según las potencias crecientes de* $(x-1)$,

$$y = f(x) = \text{Log}\, x \quad \text{y} \quad a = 1.$$

Tenemos:

$$f(x) = \text{Log}\, x \qquad f(a) = \text{Log}\, 1 = 0$$

de donde, derivando:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} & f'(a) &= \frac{1}{1} = 1 \\ f''(x) &= -x^{-2} & f''(a) &= -1 \\ f'''(x) &= 2x^{-3} & f'''(a) &= 2. \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Se tendrá, por tanto:

$$\begin{aligned} \text{Log}\, x &= 0 + \frac{(x-1)}{1!} \cdot 1 + \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot (-1) + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot 2 + \ldots \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots \end{aligned}$$

aquí hay un número infinito de términos.

— Podríamos también desarrollar respecto a las potencias crecientes de $(x+1)$, o de $(x-2)$, o de $(x-3)$, etc., según las necesidades de cada caso particular.

2.° *Desarrollar* $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ *según las potencias crecientes de* $(x-1)$.

— Derivando y haciendo $a = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} f\ (x) &= x^3 - 2x^2 + 5x - 7 & f\ (a) &= -3 \\ f'\ (x) &= 3x^2 - 4x + 5 & f'\ (a) &= +4 \\ f''\ (x) &= 6x - 4 & f''\ (a) &= 2 \\ f'''\ (x) &= 6 & f'''\ (a) &= 6 \\ f''''(x) &= 0 & f''''(a) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, hay tan sólo cuatro términos:

$$\begin{aligned} y &= -3 + (x-1) \cdot 4 + \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot 2 + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot 6 + \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot 0 \\ &= -3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3. \end{aligned}$$

Verifiquemos, desarrollando, que encontramos de nuevo la expresión inicial:

$$y = -3 + 4(x-1) + (x^3 - 2x + 1) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$
$$= x^3 - 2x^2 + 5x - 7$$

lo cual es, en efecto, exacto.

3.° *Desarrollar e^x según las potencias crecientes de $(x-2)$.*

Tenemos, derivando, y haciendo $a = 2$:

$$f(x) = e^x \qquad f(a) = e^2$$
$$f'(x) = e^x \qquad f'(a) = e^2$$
$$f''(x) = e^x \qquad f''(a) = e^2, \qquad \text{etc.,}$$

de donde:

$$e^x = e^2 + \frac{(x-2)}{1!} \cdot e^2 + \frac{(x-2)^2}{2!} \cdot e^2 + \frac{(x-2)^3}{3!} \cdot e^2 + \ldots$$

$$= e^2\left[1 + \frac{(x-2)}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \ldots\right].$$

Se ve, por otra parte, que para $x = 2$, nos queda e^2.

9. Empleo de la fórmula de Taylor para las aproximaciones numéricas. — Si en la fórmula de TAYLOR:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) + \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(a) + \ldots$$

el incremento h es *muy pequeño,* se puede despreciar el término en h^2 respecto al término en h; *a fortiori,* despreciaremos todos los demás términos, y nos quedará:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a)}$$

El nuevo valor de la función es, por tanto, igual al valor precedente $f(a)$, al cual hay que añadir el término $h \cdot f'(a)$.

— Si se quiere más precisión, tomaremos tres términos en lugar de dos:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a)} \qquad \text{etc.}$$

Ejemplos:

1.° *Calcular* sen 31°, *conociendo* sen 30° = 0,5.

$$f(a) = \text{sen } 30° = 0{,}5 \quad \text{siendo} \quad h = 1° = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745 \text{ radianes}$$

aquí

$$f(a + h) = \text{sen } 31°$$

Por tanto:

$$\text{sen } 31° = \text{sen } 30° + \frac{\pi}{180} \cdot \cos 30° = 0{,}5 + 0{,}0174 \cdot 0{,}866 = 0{,}5151.$$

Calculemos igualmente sen 32° (con $h = 0{,}0349$ radianes):

$$\text{sen } 32° = \text{sen } 30° + 0{,}0349 \cdot \cos 30° = 0{,}5 + 0{,}0349 \cdot 0{,}866 = 0{,}5302.$$

Si se quiere más precisión, se toman tres términos, lo cual nos da:

$$\text{sen } 31° = \text{sen } 30° + \frac{\pi}{180} \cdot \cos 30° + \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \left(\frac{-\text{sen } 30°}{2!}\right)$$

$$= 0{,}5 + 0{,}0174 \cdot 0{,}866 + (0{,}017)^2 \left(\frac{-0{,}5}{2!}\right)$$

$$= 0{,}51503 \quad \text{(en lugar de } 0{,}5151),$$

y

$$\text{sen } 32° = 0{,}5 + 0{,}0349 \cdot 0{,}866 + \frac{(0{,}0349)^2}{2!}(-0{,}5)$$

$$= 0{,}5299 \qquad \text{(en lugar de } 0{,}5302).$$

Las tablas trigonométricas dan:

$$\text{sen } 31° = 0{,}51504$$
$$\text{sen } 32° = 0{,}52982.$$

10. Aplicación de la fórmula de Taylor para buscar máximos y mínimos. — En el primer Tomo, al estudiar las derivadas, hemos visto varias reglas o teoremas que hemos demostrado por procedimientos geométricos, diciendo: «Veremos más adelante las demostraciones puramente algebraicas sin ninguna figura». Ha llegado ya el momento y es la fórmula de TAYLOR la que va a permitírnoslo.

El método algebraico siguiente es... una maravilla de razonamiento y de cálculo y mostrará, una vez más, por qué esta parte de las matemáticas se llama algunas veces *análisis*.

— Este método de razonamiento tiene un interés pedagógico considerable y pedimos al lector mucha atención. Es sumamente instructivo. La discusión comprende tres partes.

I. Supongamos el incremento h extremadamente pequeño y positivo. Nos queda entonces, despreciando los términos superiores de la serie de TAYLOR:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a).$$

Resulta que:

si $f'(a)$ es > 0, se deduce que $f(a + h) > f(a)$, por tanto y crece
si $f'(a)$ es < 0, se deduce que $f(a + h) < f(a)$, por tanto y decrece

Se ve así que:

si una derivada es positiva, la función $y = f(x)$ crece,

y

si una derivada es negativa, la función decrece.

II. Si la función y crece cuando x varía de $a - h$ hasta a, después decrece cuando x varía de a hasta $a + h$ (y' es primero positiva y después negativa), es que tenemos un *máximo* de y.

— Si la función y decrece cuando x varía de $a - h$ hasta a, después crece cuando x varía de a hasta $a + h$ (y' es primero negativa, después positiva), es que tenemos un mínimo de y.

— Examinemos esto un poco más de cerca, y desarrollemos $f(a - h)$ y $f(a + h)$ en serie de TAYLOR tomando solamente los tres primeros términos:

$$f(a - h) = f(a) - h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) \qquad (1)$$

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) \qquad (2)$$

o bien, despreciando los términos en h^2:

$$f(a - h) - f(a) = -h \cdot f'(a)$$
$$f(a + h) - f(a) = +h \cdot f'(a).$$

O sea, siendo h *muy pequeño,* estas dos cantidades, que representan la variación de y, pueden considerarse como iguales cuando se tiene un máximo o un mínimo de y, para $x = a$:

$$-h \cdot f'(a) = +h \cdot f'(a),$$

lo cual exige, puesto que h no es nulo, que:

$$\boxed{f'(a) = 0}$$

Es decir, tenemos un máximo o un mínimo, para $x = a$, cuando la derivada se anula, e inversamente.

III. *¿Es un máximo o es un mínimo?*

— Veamos esta *duda*:

— Si $f'(a) = 0$, nos queda $\frac{h^2}{2!} \cdot f''(a)$ para cada una de las dos expresiones. Como h^2 es positivo, todo depende del signo de la derivada segunda. Resulta que:

1.° Si $f''(a) > 0$, las ecuaciones (1) y (2) son positivas, por tanto:

$$f(a - h) > f(a)$$

y

$$f(a + h) > f(a),$$

el valor de la función que precede $f(a)$ y el valor que sigue $f(a)$ son mayores que $f(a)$, tenemos, por tanto, un *mínimo* de y para $x = a$.

2.° Si $f''(a) < 0$, las ecuaciones (1) y (2) son negativas, por tanto:

$$f(a - h) < f(a)$$

y

$$f(a + h) < f(a),$$

el valor de y, que precede $f(a)$, y el valor que sigue, son más pequeños que $f(a)$, tenemos, por tanto, un *máximo* de y para $x = a$.

3.° Si $f''(a) = 0$, nos queda, tomando el cuarto término:

$$\text{para la ecuación (1):} \quad -f'''(a) \cdot \frac{h^3}{3!}$$

$$\text{para la ecuación (2):} \quad +f'''(a) \cdot \frac{h^3}{3!},$$

y para tener un máximo o un mínimo, será necesario, puesto que h hemos supuesto que es muy pequeño, que, como hemos visto más arriba:

$$-f'''(a) = +f'''(a)$$

lo cual exige:

$$f'''(a) = 0,$$

como ocurría con la derivada primera.

— Pero, ¿tenemos un máximo o bien un mínimo?

— Tomemos ahora el término siguiente: $\frac{h^4}{4!} \cdot f''''(a)$.

Tendríamos, por tanto, la misma discusión que para $f''(a)$, que ya hemos visto, es decir que:

si $f''''(a) > 0$, tenemos un mínimo de y,
si $f''''(a) < 0$, tenemos un máximo de y, etc.

Podemos, por tanto, generalizar.

Generalización y conclusiones:

1.° Para tener un máximo o un mínimo, es necesario que la primera derivada que no se anule para $x = a$, sea de orden par.

2.° En este caso:

Tenemos un mínimo de y si esta derivada es positiva,
Tenemos un máximo de y si esta derivada es negativa.

— Hemos demostrado así, sin ninguna figura, y por un procedimiento algebraico y *analítico,* las reglas y teoremas que habíamos utilizado en el Tomo I, en el estudio de las derivadas. Basta *analizar* lo que ocurre a un lado y a otro del valor $x = a$, para el cual se tiene un máximo o un mínimo de y.

Ejemplo: Sea la función $y = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x$.

— *¿Tiene un máximo o un mínimo?*

— Anulemos y':

$$f'(x) = 5x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 8x + 1 = 0$$

cuyas raíces son 1 y $\frac{1}{5}$.

Sustituyamos x por estos dos valores en $f''(x)$:

$$f''(x) = 20x^3 - 48x^2 + 36x - 8$$

o sea

$$f''\left(\frac{1}{5}\right) = -2{,}6,$$

como esta derivada es negativa, tendremos un máximo de y para $x = \frac{1}{5}$.

—¿Qué ocurre para $x = 1$?

Observamos que $f''(1) = 0$. Calculemos, por tanto, $f'''(x)$:

$$f'''(x) = 60x^3 - 96x + 36$$

o sea

$$f'''(1) = 0.$$

Calculemos, por tanto, $f''''(x)$:

$$f''''(x) = 120x - 96$$

y

$$f''''(1) = +24.$$

Como esta derivada es positiva, tenemos un mínimo de y para $x = 1$.

OBSERVACIÓN. — Cuando $f''(x) = 0$, hemos visto en el Tomo I que tenemos un punto de inflexión, a condición de que y' no cambie de signo. (Ver el final del Tomo II, capítulo «Radio de Curvatura».)

CAPITULO II

CALCULO DE EXPRESIONES INDETERMINADAS

Hay varios casos, y comenzaremos por las expresiones que presentan la forma $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$ y que son las más frecuentes.

Estudiaremos dos procedimientos para calcular sus valores.

11. Primer método. — *Basta desarrollar el numerador y el denominador en serie de* MAC-LAURIN *y simplificar.*

Si tenemos $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, basta dividir arriba y abajo por la potencia más alta de x, como hemos mostrado en el Tomo I al estudiar las curvas, después se simplifica.

Ejemplos:

1.° Sea $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ cuando $x = 0$. Lo cual nos da: $\frac{0}{0}$.

— Tenemos, sustituyendo $\operatorname{sen} x$ por su desarrollo:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

por tanto, si $x = 0$, queda:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

que es el verdadero valor.

2.° Sea $\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ para $x = 0$.

— Tenemos:

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{0}{0}.$$

Reemplacemos $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por sus desarrollos:

$$= \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots}{x^2-\frac{2x^4}{3!}+\frac{32x^6}{6!}-\ldots}$$

dividiendo arriba y abajo por x^2:

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots}{1-\frac{2x^2}{3!}+\frac{32x^4}{6!}}$$

y, para $x = 0$, queda $\frac{1}{2}$ que el verdadero valor.

12. Segundo método. Regla de L'Hôpital. — L'HÔPITAL fue un matemático francés de comienzos del siglo XVIII, que encontró la regla siguiente:

— Supongamos que el cociente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ se presenta por la forma $\frac{0}{0}$ para $x = a$.

— Apliquemos a cada una de estas funciones el teorema de los incrementos finitos, limitado a los dos primeros términos y siendo h muy pequeño:

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f(a)+h\cdot f'(a+\theta h)}{\varphi(a)+h\cdot\varphi'(a+\alpha h)} = \frac{0+h\cdot f'(a+\theta h)}{0+h\cdot\varphi'(a+\alpha h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\alpha h)}.$$

Hagamos ahora tender h hacia cero, nos queda:

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

De donde tenemos la *regla de* L'HÔPITAL:

REGLA: *Para eliminar la indeterminación, se hace el cociente de las derivadas, después se sustituye x por el valor crítico.*

OBSERVACIÓN. — Si encontramos que $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{0}{0}$, haríamos para cada una de las dos funciones el mismo cálculo que hemos hecho más arriba, lo cual nos da:

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)},$$

que es el verdadero valor de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Si todavía este cociente nos da $\frac{0}{0}$, obtendríamos del mismo modo:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)}, \qquad \text{etc.}$$

Caso en que tenemos $\frac{\infty}{\infty}$. — Podemos entonces escribir:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

y esta última fracción da $\frac{0}{0}$. Tomamos, por tanto, el verdadero valor de este cociente aplicándole la regla de L'HÔPITAL:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{-\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}}{-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}} = \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2 \cdot \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}.$$

O sea, para $x = a$, la expresión estudiada da $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ y su verdadero valor es la expresión anterior en la cual se hace $x = a$:

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \left[\frac{f(a)}{\varphi(a)}\right]^2 \cdot \frac{\varphi'(a)}{f'(a)}$$

o bien, simplificando,

$$1 = \frac{f(a)}{\varphi(a)} \cdot \frac{\varphi'(a)}{f'(a)},$$

de donde sacamos por fin:

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

En resumen, cuando se encuentra $\frac{\infty}{\infty}$ basta también hacer el cociente de las derivadas, como en el caso $\frac{0}{0}$.

EJEMPLOS. — 1.° *Límite de* $\frac{\operatorname{Log} x}{1-x}$ *para* $x = 1$.

Tenemos: $\frac{\operatorname{Log} x}{1-x} = \frac{0}{0}$.

La regla nos da entonces, tomando el cociente de las derivadas:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -\frac{1}{x} \to -1, \qquad \text{que es el verdadero valor.}$$

2.° *Límite de* $\frac{a^x}{x^m}$ *para* $x = \infty$ $\qquad (a > 1 \text{ et } m > 0)$.

Tenemos:

$$\frac{a^x}{x^m} = \frac{\infty}{\infty}$$

de donde:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{a^x \operatorname{Log} a}{m x^{m-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

o también:

$$\frac{N''}{D''} = \frac{a^x (\operatorname{Log} a)^2}{m(m-1)x^{m-2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Calculemos por tanto la derivada *emésima*:

$$\frac{N'^m}{D'^m} = \frac{a^x \cdot (\operatorname{Log} a)^m}{m(m-1)\,(m-2)\ldots x^{m-m}}$$

$$= \frac{a^x (\operatorname{Log} a)^m}{m!} \to \infty.$$

Por tanto la exponencial a^x crece más rápidamente que x^m, es decir, más rápidamente que la potencia, cualquiera que sea el valor de m (positivo).

3.° *Límite de* $\frac{\text{Log } x}{x^m}$ para $x = \infty$.

Tenemos:

$$\frac{\text{Log } x}{x^m} = \frac{\infty}{\infty}$$

el verdadero valor será:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{\frac{1}{x}}{mx^{m-1}} = \frac{1}{mx^m} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

por tanto, el logaritmo neperiano de un número crece menos rápidamente que el número.

4. *Límite de* $\frac{x-1}{x^m-1}$ *para* $x = 1$ (*siendo* $m > 0$).

Tenemos:

$$\frac{x-1}{x^m-1} = \frac{0}{0}$$

de donde:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{1}{mx^{m-1}} = \frac{1}{m}$$

5.° *Límite de* $\frac{x - \text{sen } x}{x^3}$ *para* $x = 0$.

Tenemos:

$$\frac{x - \text{sen } x}{x^3} = \frac{0}{0}$$

el verdadero valor será:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

calculemos por tanto $\frac{N''}{D''}$:

$$\frac{N''}{D''} = \frac{\text{sen } x}{6x} = \frac{0}{0}$$

y por fin:

$$\frac{N'''}{D'''} = \frac{\cos x}{6}$$

lo cual, para $x = 0$, nos da $\frac{1}{6}$, que es el verdadero valor.

6.° *Límite de* $\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \varphi}{x - \varphi}$, *para* $x = \varphi$ (*y donde* φ *es una constante*).

Tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \varphi}{x - \varphi} = \frac{0}{0}.$$

Por tanto, derivando *con respecto a* x, el verdadero valor es:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{\cos x}{1} = \cos \varphi.$$

7.° *Límite de* $\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}$ *para* $x = 0$.

Tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}.$$

Por tanto:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{3 \cos 3x}{\cos x} = 3$$

que es el verdadero valor.

8.° *Límite de* $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$ *para* $x = 2$.

Tenemos:

$$\frac{N}{D} = \frac{0}{0}$$

Por tanto:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{2x - 3}{2x + 1} = \frac{1}{5},$$

que es el verdadero valor.

9.° *Límite de* $\frac{x - \operatorname{arc\,sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$ *para* $x = 0$.

Tenemos:

$$\frac{N}{D} = \frac{0}{0}$$

por tanto:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{N''}{D''} = \frac{-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{N'''}{D'''} = \frac{-(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x\dfrac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x)}{\cos x} = -1$$

por tanto:

$$\frac{x - \operatorname{arc\,sen} x}{x - \operatorname{sen} x} \to -1, \text{ que es el verdadero valor.}$$

13. Otras indeterminaciones. — Las expresiones siguientes son también indeterminadas:

$$0 \cdot \infty \qquad \infty^0 \qquad 0^0 \qquad 1^\infty.$$

Intentaremos siempre poner estas expresiones mediante la forma de cociente, con objeto de poder aplicar la regla de L'HÔPITAL.

Cuando hay un exponente, basta tomar logaritmos neperianos en los dos miembros ,lo cual nos da un producto, que se transforma fácilmente en cociente.

Ejemplos:

1.° *Límite de* $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ *para* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Tenemos:

$$y = \infty^0$$

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros:

$$\operatorname{Log} y = \cos x \cdot \operatorname{Log} \operatorname{tg} x = 0 \cdot \infty$$

o también:

$$\operatorname{Log} y = \frac{\operatorname{Log} \operatorname{tg} x}{\dfrac{1}{\cos x}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Busquemos ahora el verdadero valor, haciendo el cociente de las derivadas:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{-\dfrac{1}{\cos^2 x}(-\operatorname{sen} x)} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{0}{1} = 0,$$

así:

$$\operatorname{Log} y \to 0, \qquad \text{por tanto} \qquad y \to 1.$$

2.° *Límite de* $y = (\cos x \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$ *para* $x = 0$.

Tenemos:

$$y = 1^{\infty}.$$

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros:

$$\operatorname{Log} y = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{Log} (\cos x + \operatorname{sen} x)$$

$$= \infty \cdot \operatorname{Log} 1 = \infty \cdot 0$$

o también:

$$\operatorname{Log} y = \frac{\operatorname{Log} (\cos x + \operatorname{sen} x)}{x} = \frac{0}{0}.$$

El verdadero valor es, por tanto:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{\dfrac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x}(-\operatorname{sen} x + \cos x)}{1}$$

$$= \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} \to 1.$$

Así:

$$\operatorname{Log} y \to 1 \qquad \text{por tanto:} \qquad y \to e.$$

3.° *Límite de* $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ *para* $x = 0$.

Tenemos:

$$y = 0^{0}.$$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{Log} \operatorname{sen} x = 0 \cdot \infty,$$

o también:

$$\operatorname{Log} y = \frac{\operatorname{Log} \operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\operatorname{Log} 0}{\infty} = \frac{-\infty}{\infty},$$

por tanto:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x} = -\operatorname{sen} \to 0.$$

Así:

$$\operatorname{Log} y = 0 \qquad \text{por tanto:} \qquad y \to 1.$$

OBSERVACIÓN. — No hay que olvidar que las expresiones siguientes no son indeterminadas:

$\frac{0}{a}$ que es igual a 0.

$\frac{a}{0} \to \infty$ $\qquad 0^a = 0$ (a es positivo, finito y no nulo)

$\frac{\infty}{a} \to \infty$ $\qquad \infty^a = \infty$ (idem).
$\infty\infty = \infty$

$\frac{a}{\infty} \to 0$ $\qquad 0\infty = 0.$

CAPITULO III

ESTUDIO DE LAS SERIES

(*Se puede prescindir de este capítulo en un primer estudio,* y no es necesario para abordar los complejos y el cálculo diferencial.)

14. Definiciones y preliminares. — Una serie es una sucesión ilimitada de números cualesquiera que se suceden unos a otros, según una ley determinada, de forma que se pueda calcular el valor de un término cuando se conoce su rango.

Los desarrollos en serie de MAC-LAURIN o de TAYLOR son series; las progresiones aritméticas y geométricas son también series.

Progresiones aritméticas. — Es una sucesión de términos tales que cada uno de ellos es igual al precedente aumentando en una cantidad constante r que se llama *razón,* como:

$$a \quad a + r \quad a + 2r \quad a + 3r \ldots a + (n-1)r \ldots$$

donde a es el primer término. La serie exterior tiene n términos.

Calculemos la suma de los n primeros términos observando que la suma de los términos equidistantes de los extremos es constante:

el primero y el *enésimo* término dan:

$$a + [a + (n-1)r] = 2a + nr - r,$$

el segundo y el término $(n-1)$ dan:

$$(a + r) + [a + (n-2)r] = 2a + nr - r,$$

el tercero y el término $(n-2)$ dan:

$$(a + 2r) + [a + (n-3)r] = 2a + nr - r,$$

etc...

Como habrá $\frac{n}{2}$ grupos idénticos (tomando n par), la suma de los n primeros términos será. por tanto, llamando l al valor del término *enésimo*:

$$S = (a + l)\frac{n}{2}.$$

Progresión geométrica. — Es una sucesión de números tales que cada uno de ellos es igual al precedente multiplicado por un número constante r llamado *razón*:

$$\underbrace{a \quad a \cdot r \quad a \cdot r^2 \quad a \cdot r^3 \ldots\ldots a \cdot r^{n-1}}_{n \text{ términos}} \ldots$$

Calculemos la suma de los n primeros términos:

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1},$$

multipliquemos los dos miembros por r:

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n,$$

restemos esta segunda expresión de la primera:

$$S - Sr = S(1 - r) = a - ar^n,$$

de donde:

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r} = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Naturalmente si $r > 1$, la suma de un número infinito de términos es infinita, pero si r es menor que 1, los términos decrecen y podemos preguntarnos si la suma es finita o infinita. En el caso en que $r < 1$, $r^n \to 0$, para $n = \infty$, nos queda:

$$\boxed{S = \frac{a}{1 - r}}$$

Ejemplo. — *Sea la progresión, de razón* $\frac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots.$$

La suma de un número infinito de términos es:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

es, por tanto, finita.

Sumas sucesivas de una serie. — Sea la serie:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

las sumas formadas añadiendo los dos primeros términos, los tres primeros términos, etc., se llaman sumas sucesivas:

$$u_0 + u_1 \qquad u_0 + u_1 + u_2 + u_3.$$
$$u_0 + u_1 + u_2 \qquad \vdots$$
$$\vdots$$

15. Serie convergente. — *Una serie es convergente cuando las sumas sucesivas tienden hacia un límite finito, mientras que el número de términos tiende a infinito. Es necesario, para esto, que el término general tienda hacia cero, pero esta condición no es suficiente, como veremos.*

SERIE DIVERGENTE. — *Es una serie que no es convergente.*

Hay que señalar que si el término general tiende hacia cero, la serie no es necesariamente convergente. Así, por ejemplo, en la serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

el término general tiene por límite cero, *pero es sin embargo divergente.* En efecto, separemos en grupos cuyo último término es una potencia de 2, podemos entonces escribir la serie de desigualdades siguientes:

$$1 + \frac{1}{2} > 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} \quad \text{o bien} \quad > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} \quad \text{o bien} \quad > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} \quad \text{o bien} \quad > \frac{1}{2}, \quad \text{etc.}$$

y como hay un número infinito de términos, tendremos una serie infinita de grupos en la que cada uno es mayor que $\frac{1}{2}$, la suma tiende por tanto hacia infinito, y la serie es divergente.

16. Resto de una serie. — TEOREMA. — *Una serie cualquiera es siempre de la misma naturaleza que la serie que se obtiene al suprimir los p primeros términos.*

En efecto, sea:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_p + \ldots \qquad (1)$$

suprimiendo los primeros términos, nos quedará:

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n} + \ldots. \qquad (2)$$

Formemos una suma sucesiva de la segunda serie, por ejemplo:

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n} = \Sigma_n,$$

y sea la serie que parte de u_0 y acaba en u_{p+n}:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{p+n} = \Sigma_{p+n}.$$

Comparándolas vemos que:

$$\Sigma_{p+n} = (u_0 + u_1 + \ldots + u_p) + (u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n})$$

o bien:

$$\Sigma_{p+n} = S_p + \Sigma_n, \qquad \text{(siendo } S_p \text{ la suma parcial)}$$

por tanto, si la serie (2) es convergente Σ_n tiende hacia un límite y Σ_{p+n} tiende hacia el límite $S_p + \Sigma_n$; y la serie (1) será también convergente.

Del mismo modo, si Σ_n no tiene límite, Σ_{p+n} no lo tendrá tampoco.

Consecuencias:

1.° Cuando se tenga un carácter de convergencia o divergencia podrá ser aplicado a partir de un cierto término.

2.° *Se llama resto* R *de una serie convergente, correspondiente a una suma parcial* S_p, *a la suma de la serie convergente formada al suprimir todos los términos de* S_p.

Sea:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_p + \ldots$$

y

$$S_p = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_p,$$

el resto es:

$$R = u_{p+1} + u_{p+2} + \dots$$

y resulta que:

$$S = S_p + R.$$

En la práctica intentamos ver si se puede despreciar R.

Diferentes clases de series. — Hay:

1.° Series con términos positivos,
2.° Series con términos alternos (+ y —),
3.° Series con términos cualesquiera.

TEOREMAS GENERALES

17. Propiedad del término general. — *En una serie convergente el término general u_n tiende hacia cero cuando el rango de este término tiende hacia infinito.*

Sea la serie:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

y sean dos sumas parciales consecutivas:

$$S_n = S_{n-1} + u_n$$

o bien:

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Si

$$n \to \infty, \qquad S_n \to S \text{ total} \qquad y \qquad S_{n-1} \to S,$$

por tanto:

$$u_n \to 0.$$

Resulta que cuando el término general no tiende hacia cero, la serie es divergente, la suma de todos los términos tiende hacia infinito, y la serie no tiene ningún interés práctico.

OBSERVACIÓN. — La condición anterior de convergencia es necesaria, pero *no es suficiente.*

— En este caso se aplicará *una u otra* de las dos reglas siguientes. Según el tipo de la serie una de estas reglas es frecuentemente más práctica de empleo que la otra; son casos especiales. Otras veces es imposible aplicar ambas reglas.

I. SERIES DE TERMINOS POSITIVOS

Haremos el estudio *para una u otra* de ambas reglas siguientes: la regla de CAUCHY o la regla de D'ALEMBERT.

18. Regla de Cauchy.

PRIMERA FORMA. — *Si en una serie,* $\sqrt[n]{u_n}$ *permanece, a partir de un cierto rango, inferior o igual a un número* $K<1$, *la serie es convergente:*

Si

$$\boxed{\sqrt[n]{u_n} \leqslant K<1}, \qquad (K \neq 1)$$

y si

$$\boxed{\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1} \qquad \textit{la serie es divergente.}$$

— Sea en efecto:

$$\sqrt[p]{u_p} \leqslant K, \qquad \sqrt[p+1]{u_{p+1}} \leqslant K, \qquad \sqrt[p+2]{u_{p+2}} \leqslant K, \qquad \text{etc.}$$

de donde:

$$u_p \leqslant K^p, \qquad u_{p+1} \leqslant K^{p+1}, \qquad u_{p+2} \leqslant K^{p+2} \qquad \text{etc.}$$

Sumemos:

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n} \leqslant K^p(1 + K + K^2 + \ldots + K^n)$$

o para $n+1$ términos:

$$\leqslant K^p \left(\frac{1-K^{n+1}}{1-K}\right);$$

o $K^{n+1}<1$

por tanto

$$< \frac{K^p}{1-K}$$

y, si n tiende hacia infinito, la suma de la serie

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n}$$

crece, pero permanece inferior a $\dfrac{K^p}{1-K}$, por tanto esta suma tiende hacia un límite finito, es decir, que la serie, a partir de u_p, es convergente, y ocurrirá lo mismo para la serie estudiada.

Se obtiene también un límite superior del resto R:

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = R_{p-1} \leqslant \frac{K^p}{1-K}$$

o sea:

$$\boxed{R_p \leqslant \frac{K^{p+1}}{1-K}}$$

Divergencia. — Supongamos que sea siempre a partir de un cierto rango:

$$\sqrt[n]{u_p} \geqslant 1$$

de donde:

$$u_p \geqslant 1\,,$$

por tanto, u_n no puede tender hacia cero.

19. Segunda forma de la regla de Cauchy (*o puesta en práctica de la primera forma*). — *Si en una serie de términos positivos la expresión* $\sqrt[n]{u_n}$ *tiende hacia un límite finito* λ, *cuando el rango n tiende hacia infinito, y si*

$\lambda < 1$,	*la serie es convergente*
$\lambda > 1$,	*la serie es divergente*
$\lambda = 1$,	*hay duda.*

Demostración.

1.º $\qquad \lambda < 1 \quad$ y $\quad \sqrt[n]{u_n} \to \lambda.$

Si se da un número positivo ε muy pequeño sabemos que a partir de un cierto rango $n = p$ tenemos:

$$\lambda - \varepsilon < \sqrt{u_n} < \lambda + \varepsilon.$$

O bien, puesto que $\lambda < 1$, podemos tener un ε tal que:

$$\lambda + \varepsilon < 1.$$

Por ejemplo, se tomará $\varepsilon = \dfrac{1-\lambda}{2}$ y a partir de un cierto rango se tendrá:

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant \lambda + \varepsilon < 1,$$

por tanto la serie es convergente.

2.° $\lambda > 1$. Se tomará $\varepsilon = \lambda - 1$, y tendremos:

$$\sqrt[n]{u_n} > 1$$

por tanto la serie es divergente.

Ejemplos:

1.° *Sea la serie:*

$$1 + \frac{x}{1} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{x}{n}\right)^n + \ldots$$

donde $x > 0$. Se tendrá:

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{x}{n},$$

que tiende hacia 0 si $n \to \infty$, por tanto la serie es convergente.

2.° *Sea la serie:*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots$$

Tenemos:

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{x^n}} = \frac{1}{x},$$

por tanto, si $x > 1$, la serie es convergente,

si $x < 1$, la serie es divergente.

20. Regla de D'Alembert.

PRIMERA FORMA. — *Si, en una serie de términos positivos, la relación de un término al precedente es menor o igual que un número* $K < 1$:

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant K < 1}$$

la serie es convergente, y si la relación:

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1}$$

la serie es divergente.

Demostración: Sea la serie:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

y, si a partir de un cierto rango $n = p$, tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant K < 1,$$

se tendrá:

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} \leqslant K$$

de donde:

$$u_{p+1} \leqslant K \cdot u_p$$

del mismo modo:

$$\frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} \leqslant K \qquad \text{de donde} \qquad u_{p+2} \leqslant K \cdot u_{p+1} \leqslant K^2 u_p,$$

del mismo modo:

$$u_{p+3} \leqslant K \cdot u_{p+2} \leqslant K^3 u_p,$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$u_{p+n} \leqslant K^n \cdot u_p.$$

Sumemos miembro a miembro:

$$u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \ldots + u_{p+n} \leqslant K \cdot u_p(1 + K + K^2 + \ldots + K^{n+1})$$

por tanto:

$$\leqslant K \cdot u_p \left(\frac{1 - K^n}{1 - K}\right)$$

o sea, $1 - K$ es menor que 0, por tanto, *a fortiori*:

$$< K u_p \cdot \frac{1}{1 - K}$$

y, si $n \to \infty$, se ve que la suma:

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n}$$

va creciendo, por tanto, esta suma tiene un límite, y la serie es convergente.

Además, este límite es el resto R_p de la serie hasta u_p:

$$R_p \leqslant \frac{K \cdot u_p}{1 - K}$$

donde K es un número tal que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant K \text{ (a partir de } n = p).$$

Si, ahora $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, se tiene $u_{n+1} > u_n$, que no tiende hacia cero, por tanto, la serie es divergente.

21. Segunda forma de la regla de D'Alembert (*puesta en práctica de la primera forma*). — *Si la relación de un término al precedente,* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tiende hacia un límite* λ *cuando* $n \to \infty$, *y si:*

$\lambda < 1$	*la serie es convergente,*
$\lambda > 1$	*la serie es divergente,*
$\lambda < 1$	*hay duda.*

En efecto, sea un número $\varepsilon > 0$. Se tendrá a partir del rango $n = p$:

$$\lambda - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda + \varepsilon.$$

Hay entonces tres casos:

1.° $\lambda < 1$. Se podrá tomar ε tal que:

$$K = \lambda + \varepsilon < 1$$

o bien

$$\varepsilon < 1 - \lambda$$

y $\frac{u_{n+1}}{u_n} < K$, por tanto la serie es convergente.

2.° $\lambda > 1$. Tomemos entonces ε tal que:

$$\varepsilon = \lambda - 1$$

que es positivo, de donde se deduce:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \qquad \text{(puesto que } \lambda > 1\text{)}$$

y la serie es divergente.

3.° $\lambda = 1$. La regla es inaplicable.

Ejemplos:

1.° *Se la serie:*

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

donde $x > 0$.

Tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1}$$

que tiende hacia cero, por tanto la serie es convergente cualquiera que sea x.

2. *Sea la serie*:

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots$$

donde $x > 0$.

Tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \frac{n+1}{n} \cdot x$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

y, si $n \to \infty$, la relación tiende hacia x, por tanto:

si $x < 1$ serie convergente,
si $x > 1$ serie divergente,

si $x = 1$, tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$$

por tanto, serie divergente.

3.° *Sea la serie*:

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

donde $x > 0$.

Tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{x^n}{n}} = \frac{nx}{n+1} = \frac{x}{1 + \dfrac{1}{n}},$$

y, si $n \to \infty$, esta relación tiende hacia x, por tanto:

si $x < 1$ serie convergente,
si $x > 1$ serie divergente,

si $x = 1$, tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}$$

que tiende hacia 1, por tanto, hay duda.

Cálculo numérico y aproximación. — En el ejemplo anterior, hagamos $x = \frac{1}{2}$, calculemos la suma:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n} \frac{1}{2^n} + \ldots$$

y busquemos un límite superior del resto.

El término general de la serie es:

$$u_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Apliquemos entonces la regla de D'ALEMBERT. Hemos encontrado anteriormente:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = x \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1}.$$

O sea, esta relación tiende hacia $\frac{1}{2}$ cuando $n \to \infty$; y como $\frac{n}{n+1} < 1$, resulta que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}.$$

Para un término de rango p cualquiera, tomando $K = \frac{1}{2}$ se obtiene, para el resto R_p:

$$R_p < K \cdot \frac{u_p}{1 - K} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_p}{1 - \frac{1}{2}} = u_p.$$

Hagamos la suma de los cinco primeros términos, tomando cuatro decimales:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} = 0{,}125$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} = 0{,}0416$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} = 0{,}0156$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} = 0{,}0062$$

$$0{,}6884 = S_5 .$$

Busquemos la aproximación obtenida.

Tenemos:

$$S = S_5 + R_5$$

donde R_5 se ha obtenido por defecto, y $< 0{,}0063$.

Es decir, sobre los tres primeros términos, tenemos un error:

$$\varepsilon < 0{,}0003,$$

por tanto, tomando $S = 0{,}6884$, tenemos en total $\varepsilon' < 0{,}0066$ por defecto; tenemos, por tanto, S con una aproximación de casi $\frac{1}{100}$. Entonces, tomaremos para la suma total, solamente 0,69 y el error sobre 0,69 será por exceso igual a:

$$0{,}69 - 0{,}6884 = 0{,}0016$$

de donde finalmente, la suma $S = 0{,}69$ es aproximada, y el error es menor que 0,0066. Por tanto:

$$S = 0{,}69 \qquad \text{con una aproximación } \frac{1}{100}.$$

4.° *Sea la serie:*

$$\frac{2}{1}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots + \frac{n}{n-1}x^{n-1} + \ldots$$

donde $x > 0$.

Tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{n+1}{n} \cdot x^n}{\dfrac{n}{n-1} x^{n-1}} = \frac{n^2-1}{n^2} x$$

$$= x\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Si $n \to \infty$, esta relación tiende hacia x, por tanto:

si $x < 1$ serie convergente,
si $x > 1$ serie divergente,
si $x = 1$ hay duda.

5.° *Sea la serie:*

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \ldots \frac{n-1}{n} x^{n-1} + \ldots \qquad \text{(donde } x > 0\text{)}$$

Tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{n}{n+1} x^n}{\dfrac{n-1}{n} x^{n-1}} = \frac{n^2}{n^2-1} x$$

$$= x \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n^2}},$$

y, para $n \to \infty$:

si $x < 1$ serie convergente,
si $x > 1$ serie divergente,
si $x = 1$,

tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{n^2-1} > 1$$

por tanto serie divergente.

Ejemplo numérico: Hagamos $x = \dfrac{1}{3}$

Tenemos:

$$R_p \leqslant \frac{K \cdot u_p}{1 - K}$$

y

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2}{n^2 - 1} < \frac{1}{2}.$$

Busquemos el rango para el cual se cumple esto.

O sea, cuando n crece, la relación:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$$

disminuirá, si para el término despreciado:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2},$$

ocurrirá lo mismo para las relaciones siguientes, y entonces tendremos:

$$R_p < \frac{1}{2} \frac{u_p}{1 - \frac{1}{2}}$$

o sea:

$$R_p < u_p.$$

Se tendrá, por tanto:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}1666$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = 0{,}0740$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{27} = 0{,}0277$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{81} = 0{,}0098$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{243} = 0{,}0034$$

$$0{,}2815$$

Calculemos el cociente del 5.º al 4.º término:

$$\frac{0{,}0034\ldots}{0{,}0098\ldots} < \frac{0{,}004}{0{,}009}$$

o sea:

$$0{,}004 < \frac{0{,}004}{0{,}009}$$

y *a fortiori* para los términos siguientes.

Entonces, tomemos $K = 0{,}4$.

Se tendrá:

$$R \leqslant \frac{0{,}4}{0{,}6}\, u_p = \frac{0{,}4}{0{,}6} \cdot 0{,}0035$$

$$R < 0{,}0024.$$

O sea, el error sobre los cuatro últimos términos es menor que 0,0005, es decir, *en total*:

$$\varepsilon < 0{,}0029.$$

Por tanto, tomando 0,29 para la suma de los cinco primeros términos, cometemos por exceso un error de:

$$0{,}0085 = 0{,}29 - 0{,}2815.$$

En resumen, tomando $S = 0{,}29$ cometemos un error por exceso, más pequeño que $\frac{1}{100}$.

6.º *Sea la serie:*

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \qquad \text{(donde } x > 0\text{)}.$$

Apliquemos la regla de D'ALEMBERT:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,(n+2)}}{\dfrac{x^n}{n(n+1)}} = x\,\frac{n}{n+2} \to x \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

por tanto:

si $x > 1$ la serie es divergente,

si $x < 1$ la serie es convergente,

si $x = 1$ hay duda $\left(\frac{n}{n+2} \to 1 \text{ permaneciendo } < 1\right)$.

Sea por ejemplo, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ La serie es por tanto convergente. Calculemos la suma con una aproximación de $\frac{1}{100}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = 0{,}2887$$

$$\frac{x^2}{2 \cdot 3} = 0.0556$$

$$\frac{x^3}{3 \cdot 4} = 0{,}0160$$

$$\frac{x^4}{4 \cdot 5} = 0{,}0056$$

$$0{,}3659$$

con resto:

$$R_n < \frac{K u_n}{1 - K},$$

donde K es el límite superior de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a partir de:

$$n \geqslant 5.$$

Tenemos por tanto que encontrar un número K tal que:

$$1 > K > \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot x,$$

o sea:

$$\frac{n}{n+2} < 1 \qquad \text{por tanto} \qquad x \frac{n}{n+2} < x,$$

tomemos por ejemplo $K = x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, y *a fortiori* $K = 0{,}6$:

$$R_4 < 0{,}0056 \cdot \frac{0{,}6}{1 - 0{,}6} = 0{,}0084.$$

La suma de los errores en cada uno de los términos de la suma es más pequeño que 0,00015 para los que son por exceso, y más pequeño que 0,00845 para los que son por defecto, y la suma será aproximada en un sentido desconocido.

— Tomando para la suma 0,37 cometemos un error por exceso de 0,0041, que con el de cada término, es de 0,00425. Como cada uno de estos errores no llega a $\frac{1}{100}$, conservaremos 0,37 para la suma de la serie.

22. Comparación de dos series. — Sean dos series, la de términos u y la de términos v:

1) $$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

2) $$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

Puede ocurrir que tengamos que comparar ambas, y si se sabe que una es convergente o divergente, podemos obtener información sobre la otra. Por esto, utilizaremos el teorema siguiente.

TEOREMA. — *Si, a partir de un cierto rango, los términos de la serie (1) son menores o iguales que los términos del mismo rango de la serie (2), y si la serie (2) es convergente, la serie (1) es también convergente.*

Por el contrario, si cada término de la serie (1) es mayor o igual que el término del mismo rango de la serie (2), supuesta divergente, la serie (1) es divergente.

En efecto, supongamos la serie (2) convergente, y consideremos los términos de rango n. Sea, por ejemplo:

$$u_n \leqslant v_n$$

Tenemos, por tanto:

$$\begin{aligned} u_{p+1} &\leqslant v_{p+1} \\ u_{p+2} &\leqslant v_{p+2} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ u_{p+n} &\leqslant v_{p+n} \end{aligned}$$

o sea:

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n} \leqslant v_{p+1} + v_{p+2} + \ldots + v_{p+n},$$

pero la serie (2) es convergente, la serie:

$$v_{p+1} + v_{p+2} + \ldots + v_{p+n}$$

tendrá por tanto un límite (si $n \to \infty$) que es el resto de la serie (2), la suma crece y permanece inferior a un límite R_n':

$$v_{p+1} + \ldots + v_{p+n} \leqslant R_n'$$

y *a fortiori*,

$$u_{p+1} + \ldots + u_{p+n} \leqslant R_n.$$

En este caso, la suma crece cuando n crece, y permanece inferior a R_n', tiende por tanto hacia un límite, es decir, que la serie (1), la de términos en u, es convergente y el límite es inferior a R_n'.

— Supongamos por el contrario que sabemos, para el término rango n:

$$u_n \geqslant v_n$$

y que la serie (2), la de términos en v, es divergente.

Del mismo modo que anteriormente, se obtendría:

$$u_{p+1} + \ldots + u_{p+n} \geqslant v_{p+1} + \ldots + v_{p+n}$$

la suma tiende hacia infinito por hipótesis, si no sería más pequeña que un número fijo A, tendría un límite, y (2) sería convergente, lo que es contrario a la hipótesis, por tanto a *fortiori:*

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n} \to +\infty,$$

y la serie (1), de términos en u, es divergente.

Ejemplos. — Estudiemos las series siguientes:

1.° Sea:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots.$$

Cada término de esta serie es inferior al término correspondiente de la serie:

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

que es convergente (en efecto:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2^{n-1}}} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2^{n-1}} \to 0),$$

por tanto, la primera serie es convergente.

2.° Sea:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Cada uno de sus términos es mayor que el término correspondiente de la serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

que es divergente. Por tanto la primera serie es divergente.

3.° Sea:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}}_{n\text{ términos}}+\ldots$$

El término *enésimo* es $\frac{1}{(2n-1)2n}$, el término $(n+1)$ es $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Tendremos, por tanto:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}{\frac{1}{(2n-1)2n}}=\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

y, si $n\to\infty$, esta relación da $\frac{\infty}{\infty}$.

Apliquemos entonces, la regla de L'HÔPITAL.

$$\frac{N'}{D'}=\frac{8n-2}{8n+6}=\frac{\infty}{\infty},$$

y

$$\frac{N''}{D''}=\frac{8}{8}=1,$$

por tanto, hay duda sobre la convergencia.

—Pero comparemos la serie inicial con la serie:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

que es convergente. Pero un término cualquiera de la serie inicial es *inferior* al término del mismo rango de la serie anterior, *por tanto la serie estudiada es convergente.*

II. SERIES ALTERNADAS

23. Son las series que tienen los términos alternativamente positivos y negativos, por ejemplo:

$$u_0-u_1+u_2-u_3+\ldots+u_{2n}.$$

Aquí se utiliza un solo teorema fundamental.

Teorema fundamental. — *Una serie alternada es convergente si:*

1.° *los términos decrecen en valor absoluto a partir de un cierto rango,*

2.° *el término general tiende hacia cero.*

Sea:

$$u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \ldots \geqslant u_{2n+1}.$$

Las sumas impares van creciendo:

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0 - u_1 \\ S_3 &= S_1 + (u_2 - u_3) \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ S_{2n+1} &= S_{2n-1} + (u_{2n} - u_{2n+1}) = S_{2n-1} + K^2, \end{aligned}$$

por tanto las sumas crecen (siendo positivo el paréntesis).

Las sumas pares van disminuyendo:

$$\begin{aligned} S_2 &= u_0 - u_1 + u_2 \\ S_4 &= S_2 - u_3 + u_4 = S_2 (u_3 - u_4) \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ S_{2n+2} &= S_{2n} - (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \\ &= S_{2n} - S_1^2 \qquad \text{(siendo el paréntesis negativo).} \end{aligned}$$

Tenemos, por tanto:

$$S_{2n+2} < S_{2n}.$$

Las sumas pares son *mayores* que las sumas impares: en efecto, sean dos sumas consecutivas S_{2n} y S_{2n+1}:

$$S_{2n+1} = S_{2n} - u_{2n+1},$$

por tanto:

$$S_{2n+1} < S_{2n}.$$

Resulta que:

$$S_{2n+1} < S_{2n-2},$$

por tanto:

$$S_{2n+1} < S_2$$

y por fin:

$$S_{2n+1} < u_0.$$

Por tanto las sumas impares tienen un límite $S(\leqslant u_0)$.

— Para las sumas pares tendríamos:

$$S_{2n} > S_{2n+1} \quad \text{por tanto} \quad > S_3 \quad \text{y} \quad > u_0 - u_1,$$

las sumas pares disminuyen y tienden hacia un límite $S' (\geqslant u_0 - u_1)$.

— Demostremos que, para que la serie sea convergente, es necesario que:

$$S = S'.$$

Pero $u_n \to 0$ y tenemos:

$$S_{2n+1} = S_{2n} - u_{2+1}$$

o sea, en el límite, si $n \to \infty$:

$$S = S' - 0 \qquad \text{c.q.d}$$

24. Propiedades de las series alternadas. — Una propiedad importante es la del resto: *el resto* R *es del mismo signo que el primer término despreciado, y más pequeño que este término.*

Sea, en efecto, el término $+ u_{2n}$, tenemos:

$$S = S_{2n-1} + R_{2n-1}$$

siendo:

$$R_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n+1} + u_{2n+2} - \ldots$$

Pero, este resto es la suma de una serie alternada, por tanto:

$$R_{2n-1} > 0 \quad \text{y} \quad < u_{2n} \qquad \text{c.q.d.}$$

Si ahora se toma la suma:

$$S = S_{2n} + R_{2n}$$

siendo:

$$R_{2n} = -u_{2n+1} + u_{2n+2} - u_{2n+3} + \ldots$$

de donde:

$$-R_{2n} = u_{2n+1} - u_{2n+2} + \ldots,$$

y se deduce:

$$0 \leqslant -R_{2n} \leqslant u_{2n+1}$$

por tanto, este resto es negativo, es decir, del mismo signo que el primer término despreciado, y más pequeño que él.

— Así, en una serie de términos alternados decrecientes, el error cometido tomando por valor aproximado de la suma el de sus n primeros términos, es más pequeño que el valor absoluto del primer

término despreciado. *Las series de términos alternados* convergen por tanto, más rápidamente que las series de términos positivos, para magnitudes de términos del mismo orden de valor.

Ejemplos. — Estudiemos las series siguientes:

1.º Sea:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots.$$

Tenemos que $u_n \to 0$, la serie es por tanto convergente.

Sea:

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \text{con R negativo,}$$

por tanto:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{e} \qquad \text{por exceso.}$$

Del mismo modo:

$$S_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \qquad \text{con} \qquad R_2 > 0$$

y

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{e}.$$

Del mismo modo:

$$S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8}$$
$$= 0{,}375 \qquad \text{con } R_3 \text{ negativo}$$

Del mismo modo:

$$S_4 = S_3 - \frac{1}{5!} = \frac{3}{8} - \frac{1}{120} = \frac{11}{30}$$
$$= 0{,}3666 \qquad \text{por defecto,}$$

Por tanto, se puede escribir:

$$0{,}366 < \frac{1}{e} < 0{,}375.$$

Del mismo modo, tendríamos:

$$S_5 = \frac{11}{30} + \frac{1}{6!} = \frac{11}{30} + \frac{1}{720} = \frac{265}{720}$$
$$= 0{,}3680 \qquad \text{por exceso} \qquad \text{etc.}$$

2.° Sea:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Es la serie *armónica alternada.*

Tenemos:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = 0{,}833$$

$$S_4 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = 0{,}5833.$$

Para tener una aproximación $\frac{1}{10}$ hacen falta nueve términos.

El valor absoluto de sus términos va siempre decreciendo y tiene por límite cero. La serie es por tanto convergente.

OBSERVACIÓN. — La serie de los valores absolutos de sus términos da la serie armónica ordinaria *que es divergente.* Veremos más adelante otras series de términos alternados.

III. SERIES CON TERMINOS CUALESQUIERA

25. Sea una serie en la que ciertos términos son positivos y otros negativos en un orden cualquiera.

Diremos que una serie de este tipo es *absolutamente convergente* cuando la serie de los valores absolutos es convergente.

TEOREMA. — *Una serie absolutamente convergente es convergente.*

No demostraremos en detalle este teorema que, en realidad, expresa una evidencia, y resulta de todo lo que precede. En efecto, si la serie de los valores absolutos es convergente, tomemos la serie de los términos positivos, que también será convergente. Tomemos la serie de todos los términos afectados con el signo menos y cambiemos sus signos: se obtiene, por hipótesis, una serie que es también convergente. Cada serie tiene un límite; la serie inicial tendrá por tanto como límite la diferencia de los dos límites, y será por tanto convergente.

— No estudiaremos más este tipo de serie que no se encuentra casi nunca en la práctica. Se demuestra que se puede aplicar también la regla de D'ALEMBERT, a condición de considerar *el valor absoluto* de la relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si esta relación tiende hacia un límite λ cuando n tiende hacia infinito, podremos decir que:

si

$\lambda < 1$ la serie es absolutamente convergente,
$\lambda > 1$ la serie es divergente,
$\lambda = 1$ hay duda.

IV. SERIES ENTERAS

26. Se llama serie entera una serie de la forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

donde x es una variable positiva o negativa.

— Nos limitaremos al estudio del caso en que la relación $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tiende hacia un límite α cuando $n \to \infty$. Busquemos entonces el intervalo de convergencia.

TEOREMA. — *Una serie entera es absolutamente convergente para valores de x comprendidos en un cierto intervalo, entre + m y — m (extremidades no incluidas), simétrica con relación a cero, y divergente para valores de x exteriores a este intervalo.*

Apliquemos a la serie, que es de términos cualesquiera, la regla de D'ALEMBERT generalizada:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x$$

o sea:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|,$$

si $n \to \infty$ queda, en el límite:

$$= \alpha \cdot |x|.$$

Por tanto:

si $\alpha \cdot |x| < 1$ la serie es absolutamente convergente,
si $\alpha \cdot |x| > 1$ la serie es divergente.

La primera condición se escribe:

$$|x| < \frac{1}{\alpha}$$

es decir:

$$-\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\alpha}$$

La segunda se escribe:

$$|x| < \frac{1}{\alpha}$$

o sea:

$$-\frac{1}{\alpha} > x > \frac{1}{\alpha},$$

por tanto el teorema queda demostrado, tomando:

$$m = \frac{1}{\alpha}.$$ c.q.d.

Si $\alpha = 0$:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to 0,$$

y la serie es absolutamente convergente cualquiera que sea x. Este caso entra en el precedente:

$$\left(m = \frac{1}{\alpha} \quad \text{siendo} \quad \alpha = 0\right)$$

Si $\alpha = +\infty$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \infty$, y la serie es divergente cualquiera que sea x, salvo para $x = 0$ (caso precedente en el que $m = 0$).

Se puede por tanto definir el intervalo de $-m$ hasta $+m$, como intervalo de convergencia.

Puede también ocurrir que la serie converja a dos límites, a uno solamente o a ninguno.

Ejemplos. — Estudiemos las series siguientes:

1.° $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

es convergente *cualquiera que sea* x.

2.° $$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

converge cuando $-1<x<+1$, y diverge para x exterior a este intervalo.

3.° $$\frac{x}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots-\frac{x^n}{n^2}+\ldots$$

Encontrar su intervalo de convergencia.

Tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{-\dfrac{x^n}{n^2}}=-\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot x,$$

si $n\to\infty$, tenemos $\frac{\infty}{\infty}$. Apliquemos por tanto, la regla de L'HÔPITAL al coeficiente de x:

$$\frac{N'}{D'}=-\frac{2n}{2(n+1)}=\frac{\infty}{\infty},$$

de donde:

$$\frac{N''}{D''}=-\frac{2}{2}=-1 \qquad (=\alpha)$$

y el límite es $-x$. Por tanto:

si	$-1<x<1$	la serie es absolutamente convergente,
si	$-1>x>1$	la serie es divergente,
si	$x=1$	hay duda.

Pero sustituyendo x por $+1$ o por -1 en la serie inicial obtendríamos, en cada caso, una serie alternada, que es convergente.

27. Aplicación de la convergencia de las series a algunos desarrollos en serie.

1.° $y=a^x$. $\qquad (a>0)$

Hemos encontrado, según el desarrollo de e^x (Ver página 21).

$$y=1+\frac{x\cdot\mathrm{Log}\,a}{1!}+\frac{x^2\cdot(\mathrm{Log}\,a)^2}{2!}+\frac{x^3\cdot(\mathrm{Log}\,a)^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n\cdot(\mathrm{Log}\,a)^n}{n!}\ldots$$

Tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}\cdot(\text{Log } a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n(\text{Log } a)^n} = \frac{x\cdot\text{Log } a}{n+1},$$

por tanto, si $n \to \infty$, esta relación tiende hacia 0, la serie de los valores absolutos es convergente, y la serie es convergente cualquiera que sea x. Ocurriría lo mismo para la función $y=e^x$, ya que Log $e=1$.

2.° $y = \cos x$.

Hemos encontrado ya (Ver página 24):

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

donde p es el rango del término contado *después* del 1 que está en cabeza (en suma, para el *enésimo* término hay que tomar $p = n - 1$), así para $\frac{x^4}{4!}$ que es el tercer término, hagamos $p = 3 - 1 = 2$, lo cual nos da:

$$(-1)^p \cdot \frac{x^{2p}}{(2p)!} = (-1)^2 \frac{x^4}{4!} = +\frac{x^4}{4!}.$$

Tendremos por tanto, tomando el cociente de los valores absolutos:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\dfrac{(-1)^{p+1}\cdot x^{2(p+1)}}{[2(p+1)]!}}{(-1)^p \cdot \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}} = \frac{(-1)^{p+1}\cdot x^{2(p+1)}\cdot(2p)!}{(-1)^p\cdot x^{2p}\cdot[2(p+1)]!}$$

$$= (-1)\cdot x^2 \cdot \frac{1}{2(p+1)},$$

y si p tiende hacia infinito, esta relación tiende hacia 0; como la serie de los valores absolutos es convergente, la serie inicial es convergente, cualquiera que sea x.

— Ocurriría lo mismo para $y = \text{sen } x$.

3.° Sea: $y = \text{Log } (1 + x)$.

Hemos encontrado más arriba (Ver página 23):

$$\text{Log } (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Se tendrá, tomando el cociente de los valores absolutos:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n-1} \cdot x^n}\right| = \frac{n}{n+1} \cdot |x|,$$

y si $n \to \infty$, esta relación tiende hacia $|x|$.

Por tanto, la serie será convergente si $|x| < 1$, es decir, si tenemos:

$$-1 < x < 1$$

4.° *La serie*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

es convergente para todos los valores de x comprendidos entre -1 y $+1$.

5.° *La serie*

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a\left(1-\frac{x}{a}\right)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots + \frac{x^n}{a^{n+1}}$$

es convergente si $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$.

6.° Si en la serie del cuarto ejemplo anterior hacemos $x = -x^2$ tenemos:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + x^{2n}$$

que es convergente para x comprendido entre -1 y $+1$.

Por otra parte, esta serie es una progresión geométrica cuya razón es $-x^2$ y si $x < 1$, la suma es:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1+x^2}$$

esta serie es por tanto convergente solamente en los límites indicados.

7.° *Desarrollar* $(1+x)^m$.

Tenemos:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!} x^p$$

(si n es el rango de un término, $p = n - 1$).

Tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-p}{p+1} \cdot x,$$

por tanto, si $p \to \infty$, esta relación tiende hacia $-x$ $\left(\frac{N'}{D'} = -1\right)$. Por tanto, el intervalo de convergencia es:

$$-1 < x < 1.$$

Si $|x| > 1$, la serie es divergente.

Otros ejemplos:

1.° $y = \text{arc sen } x$

$$= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} \ldots, \quad \text{convergente para } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

2.° $y = \text{arc tg } x$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots, \quad \text{convergente para } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

3.° $y = \text{sen}^2 x$

$$= x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \frac{32x^6}{6!} \ldots, \quad \text{convergente para todos los valores de } x.$$

28. Derivada de una serie. — Podemos derivar término a término (o bien integrar) una serie.

Así, una serie entera puede ser tratada como un polinomio en x, naturalmente esto únicamente en el intervalo de convergencia.

Ejemplo. — Partamos de

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

y derivemos:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$

Se encuentra así rigurosamente, el desarrollo en serie $\frac{1}{1+x^2}$, que hemos estudiado más arriba.

Del mismo modo, derivando término a término el desarrollo de sen x se encuentra el desarrollo de cos x, que rogamos verifique el lector.

SEGUNDA PARTE

LOS COMPLEJOS

CAPITULO IV

GENERALIDADES

29. Preliminares. — Los complejos aparecieron durante el siglo XVII en la resolución de ecuaciones de segundo grado, cuyo discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo. Los complejos fueron estudiados por CARDAN y después por GIRARD en 1629 en la teoría de ecuaciones.

— «Las reglas a que obedecen fueron formuladas por EULER en su célebre *Introducción al Análisis infinitesimal,* después por D'ALEMBERT y por CAUCHY.» Así se expresa Pierre BOUTROUX, en sus *Principios del Análisis Matemático.*

CAUCHY, profesor en la Escuela Politécnica, los desarrolló mucho, durante la mitad del siglo XIX, no habiendo encontrado ninguna aplicación práctica. Solamente hacia 1890 el gran ingeniero americano STEINMETZ, como consecuencia de una intuición genial, tuvo la idea de aplicar los complejos a la electricidad, en el estudio de la corriente alterna. Dio así un empuje inaudito al estudio de la corriente alterna, empuje que ha tomado, desde hace algunos años, un desarrollo considerable desde que se han utilizado los complejos al estudio matemático de los circuitos de Radio. Hasta tal punto que, actualmente, este método se emplea, corrientemente, en casi todos los casos, para los estudios matemáticos en radio y en electrónica; su éxito estriba en una claridad y sencillez notables.

Evidentemente, en esta obra no podemos mostrar la aplicación de los complejos a la electricidad y a la radio, pero los que tengan interés pueden consutar el libro *Teoría y Práctica de los circuitos de electrónica y de los amplificadores,* 5.ª edición (Dunod, editor), donde encontrarán la exposición detallada de esta teoría, así como su apli-

cación a los circuitos de la radio, de la electrónica y a los amplificadores, con numerosos ejemplos numéricos.

— El modo en que los complejos se han introducido en la mayor parte de los libros de Matemáticas superiores es increíble. Pero, como decíamos en el prefacio de esta obra, este método de enseñar es ya caduco, y no será el que nosotros utilizaremos...

30. Cómo los complejos se han introducido en las matemáticas.— Sea, por ejemplo, la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

cuyo discriminante $b^2 - 4ac = -64$ es negativo, no tiene por tanto raíces reales.

Podemos sin embargo escribir:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

o sea:

$$x = 3 \pm \sqrt{-16} = 3 \pm \sqrt{16\,(-1)}$$
$$= 3 \pm 4\sqrt{-1}.$$

Tendremos por tanto dos raíces que llamaremos *imaginarias* (palabra empleada por DESCARTES), pero que no podemos calcular.

— Del mismo modo, la ecuación:

$$x^2 - 16 = 0 \qquad \text{o sea} \qquad x^2 = 16$$

tiene como raíces $x = \pm 4$, mientras que la ecuación:

$$x^2 + 16 = 0 \qquad \text{o sea} \qquad x^2 = -16$$

tendrá como raíces imaginarias:

$$x = \pm 4\sqrt{-1}.$$

Después los números imaginarios o complejos han sido generalizados y aplicados a la teoría de las ecuaciones, lo que permitió a DESCARTES enunciar su célebre teorema: *una raíz de grado m tiene siempre m raíces, reales o imaginarias.*

Todo esto no es más que un pequeño preámbulo histórico, y desde el punto de vista pedagógico, el único que nos guía. Comenzaremos el estudio de los complejos por el punto de vista geométrico.

31. Preámbulo geométrico sobre los complejos. — Consideremos en la figura (4) el vector OA igual a $+a$, el vector compuesto OB será por tanto igual a $-a$.

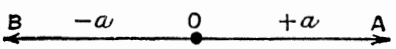

FIG. 4

— ¿Cómo pasar de la cantidad $+a$, representada por OA a la cantidad $-a$ representada por OB? Hay dos modos:

Algebraicamente, multiplicando $+a$ por -1:

$$+a \cdot -1 = -a,$$

Geométricamente, haciendo girar el vector OA una semivuelta en un sentido o en otro.

— Por lo mismo, $(-a) \cdot (-1) = +a$, y el vector OB se ha convertido en OA.

— Así, *multiplicar una cantidad por* -1 *es lo mismo que hacer girar* 180° *el vector que representa esta cantidad.* Podemos decir que (-1) es un *operador* algebraico que hace girar un vector en 180°.

—¿Cómo hacer ahora girar un vector 90°? Es necesario además precisar en qué sentido se girará, y a este respecto conservaremos el sentido positivo de la trigonometría.

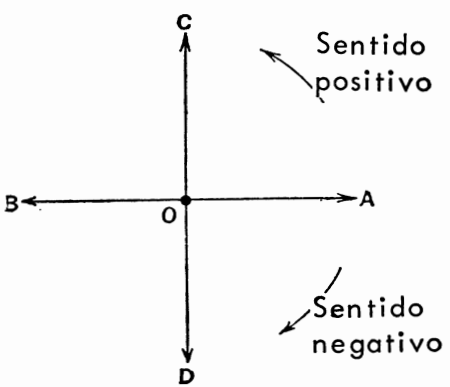

FIG. 5

— Para hacer girar OA en $+\frac{\pi}{2}$ y llevarlo a la posición de OC, habrá que multiplicarlo por un coeficiente, desconocido por el momento, y que llamaremos $+j$, de modo que haciéndole girar todavía en $+\frac{\pi}{2}$, es decir, multiplicándole una vez más por $+j$, se encuentre el vector OB, igual a $-a$. *O bien,* hacien-

do girar OA en $-\frac{\pi}{2}$, es decir, multiplicando $+a$ por $-j$, lo cual nos dará OD; después, haciendo girar otra vez OD en $-\frac{\pi}{2}$ (o sea multiplicando una vez más por $-j$) se encuentra $-a$. Los vectores OC y OD vienen, por tanto, representados por las cantidades algebraicas siguientes:

para OC: $\quad +a \cdot +j = +ja,$

para OD: $\quad +a \cdot -j = -ja.$

Así, $-3j$ *representa* un vector de longitud 3 y dirigido hacia abajo, mientras que $+5j$ representa un vector de longitud 5 dirigido hacia arriba. El factor j, cuyo valor es desconocido todavía, indica que tenemos un vector vertical y el signo de j indica de qué lado se encuentra, hacia arriba o hacia abajo.

— El factor j debe por tanto ser considerado como un *operador* algebraico que hace girar un vector en 90°.

— *¿Cuál es entonces el valor de j?*

Si hacemos girar OA dos veces en $\frac{\pi}{2}$ debemos encontrar OB. Por tanto multiplicando $+ja$ (que es OC) por $+j$, o bien $-ja$ (que es OD) por $-j$ debemos encontrar $-a$:

$$+ja \cdot j = +j^2a,$$

que debe ser igual a $-a$, y:

$$-ja \cdot -j = +j^2a.$$

Se debe tener por tanto $j^2a = -a$, o sea:

$$j^2 = -1$$

o sea:

$$\boxed{j = \sqrt{-1}}$$

En general, en los libros $\sqrt{-1}$ se designa por la letra i (inicial de la palabra *imaginaria*), pero como el principal objeto de los complejos o imaginarios es la electricidad y la radio, donde aparecerán ecuaciones en las que se representa la intensidad de una corriente eléctrica por i, esto se prestaría a confusión. Nosotros adoptaremos desde ahora la letra j en lugar de i.

Como $\sqrt{-1}$ no puede calcularse, llamamos a este número *imaginario.*

En resumen, *al multiplicar la longitud de un vector por* $+ j$, *lo hacemos girar en* $+ 90°$, *y al multiplicar su longitud por* $- j$ *lo hacemos girar en* $- 90°$.

— Escribiremos las expresiones imaginarias de los cuatro vectores en la forma siguiente:

$$\overline{OC} = + ja \quad \text{y} \quad \overline{OD} = - ja$$

$$\overline{OA} = + a \quad \text{y} \quad \overline{OB} = - a.$$

— *¿Cómo representar un vector inclinado?*

— Sea el vector OM de la figura (6). Proyectemos OM sobre el eje horizontal, lo cual nos da un triángulo rectángulo, cuyos lados son a y b, OM es la *suma geométrica* de a y de b.

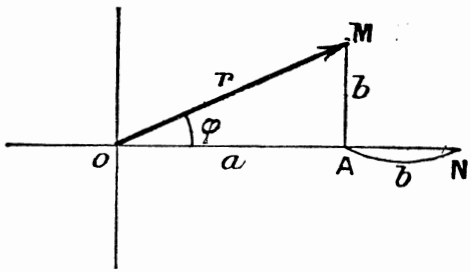

FIG. 6

Se trata ahora de transformar esta suma geométrica en una fórmula algebraica. Puesto que AM es vertical, podemos representarlo por $+ jb$; sería en resumen el vector AN igual a $+ b$ que se habría hecho girar en $+ 90°$. Se podrá por tanto *representar* el vector inclinado OM por la expresión algebraica $a + jb$, que contiene una parte real a y una parte imaginaria jb, *lo cual representa una suma vectorial.*

— *Veremos muy pronto que la expresión* $a + jb$ *es realmente una suma aritmética y que debe de ser tratada como una suma ordinaria de dos números;* pero esta suma no puede evidentemente efectuarse, ya que a y jb son números de distinta naturaleza.

— La expresión $a + jb$ tiene la doble ventaja de dar a la vez:

la longitud real del vector: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

su desfase φ: $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{b}{a}$.

— Algunas veces, la longitud del vector, es decir, su valor real se llama *módulo* y el desfase φ se llama *argumento*. Nosotros no emplearemos estos dos términos... inútiles.

— Es decir, que mientras que $\sqrt{a^2 + b^2}$ sólo indica la longitud del vector, sin indicar su posición, la expresión $a + jb$ indica a la vez su longitud real y su desfase, por tanto su posición.

La expresión imaginaria $a + jb$ representa, en forma algebraica, una suma geométrica; representa un triángulo rectángulo:

$$\boxed{\overline{OM} = a + jb}$$

Ejemplo. $4 + 3j$ representa un vector cuya longitud es:

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

y cuyo desfase viene dado por:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \text{de donde} \quad \varphi = +37°$$

— La ausencia de radical en $a + jb$ facilitará mucho los cálculos, como veremos más adelante.

32. Vectores simétricos (fig. 7). — El vector OM viene representado por la expresión imaginaria $a + jb$, por esto conviene decir: «expresión imaginaria del vector OM» y escribir:

$$\overline{OM} = a + jb.$$

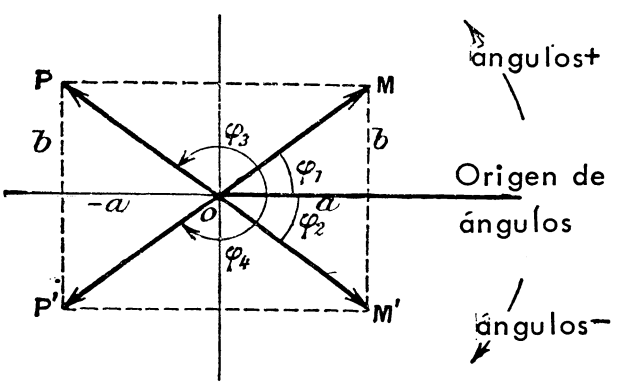

FIG. 7

El vector simétrico OM′ vendrá representado por:

$$\overline{OM'} = a - jb \qquad \text{donde} \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{b}{a}.$$

El vector simétrico OP será:

$$\overline{OP} = -a + jb,$$

su desfase es el ángulo obtuso que forma OP con el origen de ángulos y se tendrá:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a} \qquad \varphi_3 \text{ es por tanto un ángulo obtuso.}$$

Del mismo modo el vector simétrico OP′ vendrá representado por:

$$\overline{OP'} = -a - jb,$$

su desfase es el ángulo obtuso que forma OP′ con el origen de ángulos, y se tendrá:

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{-b}{-a} = +\frac{b}{a}.$$

Se ve que la longitud de todos estos vectores es siempre $\sqrt{a^2 + b^2}$ sean a y b positivos o negativos. Por fin, los signos de a y de b indican en qué cuadrante se encuentra el vector, lo que da también el valor del ángulo:

$a + jb$ está en el 1er cuadrante, φ es agudo y positivo,
$a - jb$ está en el 4.° cuadrante, φ es agudo y negativo,
$-a + jb$ está en el 2.° cuadrante, φ es obtuso y positivo,
$-a - jb$ está en el 3er cuadrante, φ es obtuso y negativo.

Ejemplo: Sea $4 + 3j$. Tenemos $r = 5$ y $\varphi = +37°$.

$4 - 3j$ está en el 4.° cuadrante, $r = 5$ y $\varphi = -37°$,
$-4 + 3j$ está en el 2.° cuadrante, $r = 5$ y $\varphi = 180 - 37 = 143°$,
$-4 - 3j$ está en el 3er cuadrante, $r = 5$ y $\varphi = -143°$, o sea $180° + 37°$.

OBSERVACIÓN. — Todo término real representa un vector horizontal y todo término multiplicado por j representa un vector vertical.

33. Algunos cálculos sobre j. — Tratando j como un número aritmético ordinario, se obtiene sucesivamente:

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1$$
$$j^3 = j^2 \cdot j = -1 \cdot j = -j$$
$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1)(-1) = +1$$
$$j^5 = j^4 \cdot j = 1 \cdot j = +j, \qquad \text{etc.}$$

Del mismo modo:

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j \cdot j} = \frac{j}{-1} = -1$$

$$\frac{1}{j^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\frac{1}{j^3} = \frac{1}{-j} = \frac{j}{-j^2} = +j, \qquad \text{etc.}$$

En resumen, recordamos que:

$$\boxed{j^2 = -1} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\frac{1}{j} = -j}$$

34. Hacer girar un vector en ± 90°. — REGLA. — *Basta multiplicar su expresión imaginaria $a + jb$ por $+j$ o por $-j$, según el sentido de rotación.*

Como ya hemos dicho, $a + jb$ *debe de tratarse* como una suma aritmética ordinaria (y lo demostraremos en la página 106, en el capítulo *Utilización de los complejos*). Se tendrá por tanto:

$$(a + jb) \cdot j = aj + j^2b = aj + (-1)b$$
$$= -b + ja.$$

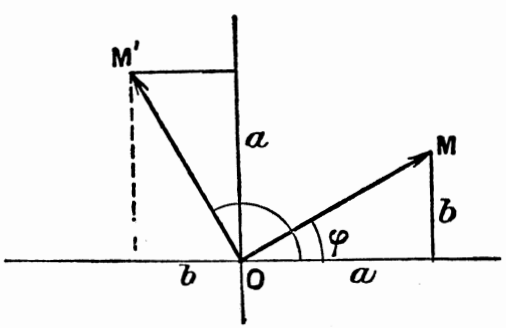

FIG. 8

Pero, la figura (8) muestra que el vector OM', perpendicular a OM, es, en efecto:

$$\overline{OM'} = -b + ja$$

Así, al girar en $+90°$ el vector $4 + 3j$, se convierte en $-3 + 4j$, y su desfase viene dado por:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} = -1{,}33,$$

el ángulo φ es por tanto un ángulo obtuso cuyo valor es:

$$\varphi = 90° + 37° = 127°.$$

35. Segunda forma de representar un vector por un complejo. — Tomemos de nuevo la figura (6), donde:

$$\overline{OM} = a + jb,$$

o también:

$$\left| \begin{array}{l} a = r \cdot \cos \varphi \\ b = r \cdot \operatorname{sen} \varphi, \end{array} \right.$$

de donde:

$$\begin{aligned} a + jb &= r \cos \varphi + j \cdot r \operatorname{sen} \varphi \\ &= r (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi) \end{aligned}$$

se tendrá por tanto:

$$\boxed{\overline{OM} = r (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)}$$

Esta es la segunda forma de escribir una expresión imaginaria.

Para el vector *simétrico* defasado debajo de la horizontal, se tendrá:

$$\overline{OM'} = r (\cos \varphi - j \operatorname{sen} \varphi).$$

Esta nueva forma tiene la ventaja de hacer intervenir directamente en la fórmula, a la vez la longitud real r del vector y su desfase φ. El signo de j indica el sentido del desfase.

Así, el vector $4 + 3j$, estudiado anteriormente, se escribirá:

$$\overline{OM} = 5 (\cos 37° + j \operatorname{sen} 37°).$$

El simétrico, por debajo, sería:

$$\overline{OM'} = 5 (\cos 37° - j \operatorname{sen} 37°).$$

El vector perpendicular a OM sería $\varphi = 37° + 90°$):

$$5 (\cos 127° + j \operatorname{sen} 127°).$$

Según los casos, este modo de expresión es frecuentemente más cómodo que $a + jb$. Para convertir a la forma $a + jb$, basta efectuar la operación de sustitución de $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$ por sus valores en la ecuación anterior.

36. Giro de un vector en un ángulo α cualquiera. — ¿Qué forma adquieren las expresiones precedentes si el vector gira $+\alpha$ o $-\alpha$? En este caso es más cómodo utilizar la segunda forma, y se aplica la regla siguiente.

REGLA. — *Para girar un vector en un ángulo* $\pm\alpha$, *basta multiplicar su expresión imaginaria por* $(\cos\alpha \pm j \operatorname{sen}\alpha)$. *Se toma el signo* + *o el signo* — *según el sentido de rotación.*

En efecto, tenemos, utilizando las reglas del álgebra ordinaria:

$$r(\cos\varphi + j\operatorname{sen}\varphi)\cdot(\cos\alpha + j\operatorname{sen}\alpha)$$
$$= r(\cos\varphi\cdot\cos\alpha + j\operatorname{sen}\varphi\cdot\cos\alpha + j\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\varphi + j^2\operatorname{sen}\varphi\cdot\operatorname{sen}\alpha)$$

y como $j^2 = -1$, nos queda, colocando en cabeza los dos términos reales:

$$= r[(\cos\varphi\cdot\cos\alpha - \operatorname{sen}\varphi\cdot\operatorname{sen}\alpha) + j(\operatorname{sen}\varphi\cdot\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\varphi)]$$
$$= r[\cos(\varphi+\alpha) + j\cdot\operatorname{sen}(\varphi+\alpha)].$$

Vemos así, que el nuevo desfase es ahora $\varphi + \alpha$ y el vector ha girado por tanto $+\alpha$.

— Si quisiéramos girar hacia atrás un ángulo α, multiplicaríamos por $\cos\alpha - j\operatorname{sen}\alpha$ y entonces se encuentra:

$$r[\cos(\varphi-\alpha) + j\cdot\operatorname{sen}(\varphi-\alpha)].$$

Puede ocurrir, por otra parte, que α sea mayor que φ.

Ejemplo: Girar el vector $5(\cos 37 + j\operatorname{sen} 37)$ en $+10°$.

El vector se convierte en:

$$5(\cos 47° + j\cdot\operatorname{sen} 47°).$$

Esta regla se aplica también para $\alpha = 90°$ y veríamos también que basta multiplicar la primera expresión por $+j$, puesto que:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

37. Tercera forma de escribir la expresión imaginaria de un vector. — Existe una tercera forma de complejo: es la forma exponencial.

Desarrollemos e^{jx} en serie de MAC-LAURIN:

Tenemos:

$$\begin{aligned}
f\ (x) &= e^{jx} & f\ (0) &= 1\\
f'\ (x) &= je^{jx} & f'\ (0) &= j\\
f''\ (x) &= j^2e^{jx} = -e^{jx} & f''\ (0) &= -1\\
f'''\ (x) &= -je^{jx} & f'''\ (0) &= -j\\
f''''\ (x) &= -j^2e^{jx} = +e^{jx} & f''''\ (0) &= 1\\
&= f(x) & &\\
f'''''(x) &= f'(x) & f'''''(0) &= j.\\
&\vdots & &\vdots\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Se tendrá por tanto:

$$e^{jx} = 1 + \frac{x}{1!}\cdot j + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(-j) + \frac{x^4}{4!}\cdot 1 + \frac{x^5}{5!}\cdot j \ldots$$

$$= 1 + j\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\frac{x^5}{5!} \ldots.$$

Agrupemos *separadamente* los términos reales y los términos imaginarios:

$$e^{jx} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + j\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right).$$

Se observa que el primer paréntesis es el desarrollo de $\cos x$ y que el segundo es el de $\operatorname{sen} x$. Tendremos, por tanto, la fórmula fundamental:

$$\boxed{e^{jx} = \cos x + j \cdot \operatorname{sen} x}$$

Del mismo modo, reemplazando j por $-j$, tendríamos:

$$\boxed{e^{-jx} = \cos x - j \cdot \operatorname{sen} x}$$

Podremos por tanto escribir:

$$\boxed{\begin{aligned} r\,(\cos\varphi + j \cdot \operatorname{sen}\varphi) &= r \cdot e^{j\varphi}\\ r\,(\cos\varphi - j \cdot \operatorname{sen}\varphi) &= r \cdot e^{-j\varphi}\end{aligned}}$$

Esta tercera forma es, evidentemente, más condensada en escritura.

Ejemplo: El vector de longitud 5 defasado en $+37°$ puede, en resumen, representarse de tres modos diferentes:

$$4 + 3j$$

o bien

$$5\,(\cos 37° + j \operatorname{sen} 37°)$$

o también

$$5 \cdot e^{37j}.$$

Normalmente, el ángulo debería expresarse en radianes, pero en la práctica se expresa en grados.

—El vector simétrico desfasado en $-37°$ sería:

$$4 - 3j \qquad \text{o bien} \qquad 5\,(\cos 37° - j \cdot \operatorname{sen} 37°)$$

o también:

$$5 \cdot e^{-37j}.$$

Para simplificar la escritura, evitando escribir j con su signo y representando un ángulo en exponente por $\underline{/\ \ }$, se escribirá:

$$5e^{\underline{/37}} \qquad \text{o bien} \qquad 5e^{\underline{/-37}}$$

Podemos todavía simplificar la escritura, y es únicamente una cuestión de convenio que adopta ahora en los cálculos técnicos, eléctricos y radioeléctricos: se suprime la letra e y se coloca el ángulo $\underline{/\ \ }$ en la misma línea.

Así, escribiremos:

$$5^{\underline{/37}} \qquad \text{o bien} \qquad 5^{\underline{/-37}}$$

Las operaciones siguientes se comprenden fácilmente, aplicando las reglas de cálculo de exponentes:

$$5^{\underline{/37}} \cdot 2^{\underline{/-10}} = 10^{\underline{/27}}$$

y

$$\frac{5^{\underline{/37}}}{2^{\underline{/-10}}} = 2{,}5^{\underline{/47}}.$$

Basta estar iniciado en este género de escritura sumamente condensada.

— *Inversamente,* se puede pasar de la tercera forma a la primera pasando por la segunda, calculando cos φ y sen φ.

Sea por ejemplo: $2e^{30j}$.

Es un vector de longitud 2 defasado en $+ 30°$, y en la segunda forma se escribirá:

$$2(\cos 30 + j \operatorname{sen} 30),$$

pero:

$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} 30 = \frac{1}{2},$$

lo cual nos da:

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + j.$$

El vector se escribirá por tanto $\sqrt{3} + j$. Que es un vector de longitud:

$$r = \sqrt{3 + 1} = 2 \qquad \text{siendo} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (\text{y} \quad \varphi = 30°).$$

38. Representación de una magnitud sinusoidal por medio de una expresión compleja. — Sea la función $y = A \operatorname{sen} \omega t$.

— Nos basamos, naturalmente, en la representación vectorial utilizada en electricidad para el estudio de la corriente alterna. Se sabe que vectorialmente la función y viene representada por un vector horizontal de longitud A y orientado hacia la derecha (fig. 9).

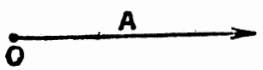

FIG. 9

Su expresión compleja será, por tanto, un término real:

$$\overline{y} = A.$$

Representemos ahora por medio de un complejo la expresión:

$$y = A \cdot \operatorname{sen} (\omega t + \varphi).$$

Gráficamente, sabemos que viene representada por un vector de longitud A y defasado en $+ \varphi$ (fig. 10); su expresión compleja será por consiguiente:

$$\overline{y} = A (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi) \qquad \text{o bien} \qquad Ae^{j\varphi}.$$

Si tuviéramos $y = A \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$, tendríamos:

$$\overline{y} = A(\cos\varphi - j \operatorname{sen}\varphi) \quad \text{o bien} \quad Ae^{-j\varphi}$$

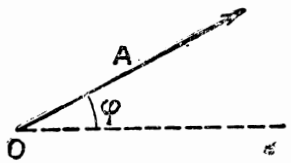

FIG. 10

Ejemplos:

1.° $y = 5 \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ se expresa mediante el complejo:

$$\overline{Y} = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + j \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}j.$$

2.° $y = 3 \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ se expresa mediante complejos por:

$$\overline{Y} = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} - j \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 3(0 - j \cdot 1) = -3j.$$

CAPITULO V

CALCULO Y UTILIZACION DE LOS COMPLEJOS

Se trata ahora de estudiar *clara* y *detalladamente,* los diferentes cálculos que podemos realizar con los complejos orientados *hacia aplicaciones prácticas.*

39. Igualdad de dos complejos. — Consideremos las expresiones $a + jb$ y $c + jd$, lo que representa en realidad dos triángulos rectángulos.

Decir que:

$$a + jb = c + jd$$

es decir, que estos triángulos son iguales y *superponibles.* Sus componentes son, por tanto, iguales y resulta que se debe de tener, a la vez:

$$a = c \quad \text{y} \quad b = d,$$

los ángulos de desfase son iguales: $\varphi_1 = \varphi_2$,

por tanto:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Se deduce entonces la regla siguiente:

REGLA. — *Basta igualar las partes reales entre sí y los coeficientes de j entre sí.*

Ejemplo:

$$3 + 4j = a + jb$$

lo cual exige que se cumpla, *a la vez*:

$$3 = a \quad \text{y} \quad 4 = b.$$

La igualdad $3 = 4j$ es imposible: una cantidad real no puede en ningún caso ser igual a una cantidad imaginaria.

Si tenemos $a + jb = 0$, es que:

$$a = 0 \quad \text{y} \quad b = 0.$$

Si tenemos $a + jb = jd$, es que:

$$a = 0 \quad \text{y} \quad b = d.$$

40. Suma de dos complejos. — Debemos tener presente el significado geométrico de un complejo. La palabra *adición* quiere decir ensamble de dos vectores, uno a continuación del otro; es decir, que se hace la *suma geométrica.*

—Así, tomemos los dos vectores $a + jb$ y $c + jd$, representados en la figura (11) por OM y OM'.

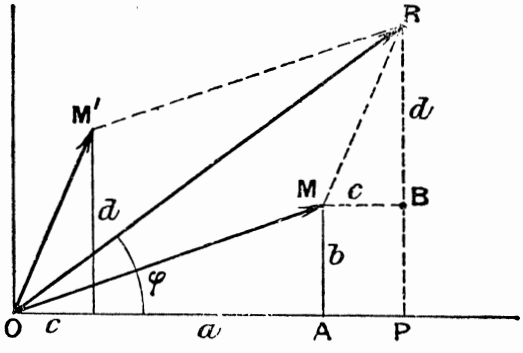

FIG. 11

— Para calcular la suma (geométrica) de estos dos vectores, llevemos a partir del punto M una línea MR igual y paralela a OM'. El vector suma es el vector OR, que es la diagonal del paralelogramo construido por los dos vectores OM y OM', es *una suma geométrica.*

— Proyectemos R sobre P con objeto de reproducir las dos componentes c y d del vector OM'. La figura nos muestra entonces que las componentes del vector suma OR, son:

$$OP = a + c \quad \text{y} \quad RP = b + d.$$

Pero, $a + c$ es la suma algebraica de las partes reales de los dos vectores y $b + d$ es la suma algebraica de los coeficientes de j; de ahí la regla:

REGLA. — *Para sumar dos expresiones complejas, basta sumar separadamente sus partes reales y sus partes imaginarias:*

$$\boxed{(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)}$$

Esto es, en el fondo, una verdad geométrica, demostrada por la figura.

Ahora se ve claramente lo que enunciamos al comienzo de este estudio: a saber, que una expresión compleja $a + jb$ es una suma aritmética (que, sin embargo, no se puede efectuar), y que *debe de tratarse como una expresión aritmética ordinaria.*

— Resulta que las reglas del cálculo algebraico elemental pueden aplicarse a una expresión imaginaria, puesto que lo que es verdadero para una suma lo es para todas las otras reglas del cálculo algebraico.

— La inclinación del vector *suma* viene dada por:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{RP}{OP} = \frac{b + d}{a + c},$$

y su valor real es:

$$r = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}.$$

Del mismo modo, se tendría:

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d).$$

Ejemplo: Tomemos los dos vectores $3 + 4j$ y $1 + j$, cuyas longitudes son:

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \text{y} \quad r_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

sus desfases vienen dadas por:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4}{3} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1}{1} = 1$$

de donde:

$$\varphi_1 = 53° \quad \text{y} \quad \varphi_2 = 45°$$

Sumemos estos dos vectores:

$$(3 + 4j) + (1 + j) = (3 + 1) + j(4 + 1) = 4 + 5j$$

cuya longitud es:

$$r = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \simeq 6{,}6.$$

y su desfase:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{5}{4} \quad \text{y} \quad \varphi \simeq 51°$$

Pero este ángulo no es la suma de los desfases de los dos vectores.

— En resumen, se conoce el vector *suma* sin que sea necesario hacer la figura.

OBSERVACIÓN. — *La suma de dos complejos conjugados* $a + jb$ y $a - jb$ *es una cantidad real.*

$$(a + jb) + (a - jb) = 2a$$

lo cual es evidente geométricamente, uno de los vectores es... la imagen del otro.

APLICACIÓN. — Veamos el cálculo de la suma de dos valores instantáneos:

$$y_1 = A \cdot \operatorname{sen} \omega t \quad \text{y} \quad y_2 = B \cdot \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Podemos escribirlos en forma compleja:

$$\overline{y_1} = A \quad \text{y} \quad \overline{y_2} = B \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = jB.$$

Se tendrá por tanto:

$$\overline{y_1} + \overline{y_2} = A + jB,$$

donde:

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}.$$

Si $A = B$, tenemos:

$$r = A\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \varphi = 1, \quad \varphi = 45°.$$

Así, la amplitud resultante es:

$$Y = A\sqrt{2} \quad \text{defasada en } 45°.$$

Se tendrá, por fin, volviendo a los valores instantáneos:

$$y = r \cdot \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= A\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

41. Producto de dos complejos.

REGLA. — *El producto de dos complejos es, en general, un complejo. Su valor real es el producto de los dos valores reales y el desfase es la suma algebraica de los dos desfases.*

Tenemos:

$$\begin{aligned}(a + jb)(c + jd) &= ac + jbc + jda + j^2bd \\ &= (ac - bd) + j(bc + ad) \\ &= m + jn,\end{aligned}$$

por tanto el valor real es:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2acbd + b^2c^2 + a^2b^2 + 2bcad} \\ &= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = r_1 r_2\end{aligned}$$

que es el producto de los dos valores reales.

— El desfase viene dado por:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{n}{m} = \frac{bc + ad}{ac - bd},$$

dividamos arriba y abajo por ac, nos queda:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi &= \frac{\frac{b}{a} + \frac{d}{c}}{1 - \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2} \\ &= \operatorname{tg} (\varphi_1 + \varphi_2)\end{aligned}$$

de donde:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \qquad \text{c.q.d.}$$

Ejemplo:

$$(3 + 4j)(1 + j) = 3 + 4j + 3j + 4j^2 = (3 - 4) + j(4 + 3) = -1 + 7j,$$

cuyo valor real es:

$$r = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = \backsim 7{,}1 \quad \text{o sea} \quad \sqrt{2{,}25} = 5\sqrt{2} = r_1 \cdot r_2$$

y

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{7}{-1} = -7 \quad \text{de donde} \quad \varphi = \backsim 98°$$

O sea, tenemos:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 53° + 45° = 98°.$$

OBSERVACIÓN. — *El producto de dos complejos conjugados es una cantidad real y su desfase es nulo.*

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + jba - jab - j^2b^2 = a^2 - j^2b^2 = a^2 + b^2.$$

Utilizaremos, frecuentemente, esta fórmula fundamental:

$$\boxed{(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2}$$

expresión que se asemeja a:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Tenemos, por tanto, el método para transformar una suma de dos cuadrados en producto. Así por ejemplo:

$$3^2 + 4^2 = 25 = (3 + 4j)(3 - 4j)$$
$$R^2 + L^2\omega^2 = (R + jL\omega)(R - jL\omega)$$
$$1 + R^2C^2\omega^2 = (1 + jRC\omega)(1 - jRC\omega)$$
$$100 = 64 + 36 = (8 + 6j)(8 - 6j)$$

PRODUCTO EN EL CASO DE LA SEGUNDA FORMA.

Tenemos:

$$r(\cos\varphi + j\,\text{sen}\,\varphi) \cdot r'(\cos\varphi' + j\,\text{sen}\,\varphi')$$
$$= rr'(\cos\varphi \cdot \cos\varphi' + j\,\text{sen}\,\varphi'\cos\varphi + j\,\text{sen}\,\varphi \cdot \cos\varphi' + j^2\,\text{sen}\,\varphi \cdot \text{sen}\,\varphi$$

pero $j^2 = -1$, por tanto:

$$= rr'[(\cos\varphi \cdot \cos\varphi' - \text{sen}\,\varphi \cdot \text{sen}\,\varphi') + j(\text{sen}\,\varphi \cdot \cos\varphi + \text{sen}\,\varphi' \cdot \cos\varphi)]$$
$$= rr'[\cos(\varphi + \varphi') + j \cdot \text{sen}(\varphi + \varphi')].$$

Se ve bien que el valor real es rr', y que el desfase es la suma de los desfases $(\varphi + \varphi')$.

PRODUCTO EN EL CASO DE LA TERCERA FORMA.

Tenemos, inmediatamente:

$$r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

esta forma se presta, por tanto, fácilmente a este género de cálculo.

EJEMPLOS: Tenemos las igualdades siguientes:

1.° $5(\cos 53 + j\,\text{sen}\,53) \cdot \sqrt{2}(\cos 45 + j\,\text{sen}\,45)$
$$= 5\sqrt{2}[\cos(53 + 45) + j\,\text{sen}(53 + 45)]$$
$$= \sqrt{50}(\cos 98° + j\,\text{sen}\,98°).$$

2.° Tenemos también $5e^{53j} \cdot \sqrt{2}e^{45j} = 5\sqrt{2}e^{98j}$ o sea $5\sqrt{2}\angle 98$.

3.° Sea $(4 + 3j)(-2j)$.

Tenemos:

$$r_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{3}{4} \quad \varphi_2 = +37°$$

$$r_2 = \sqrt{0 + 2^2} = 2 \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\infty \quad \varphi_2 = -90°$$

por tanto:

$$r = 5 \cdot 2 = 10$$

y

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 37° - 90° = -53°.$$

42. Fórmula de Moivre. — Es una fórmula curiosa y muy útil que resulta de la regla del producto de dos complejos.

— En efecto, utilicemos la segunda forma, y calculemos el cuadrado:

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)^2 &= (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi) \\ &= (\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) + j \cdot 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \\ &= \cos 2\varphi + j \operatorname{sen} 2\varphi.\end{aligned}$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)^3 &= (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)^2 \cdot (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi) \\ &= (\cos 2\varphi + j \operatorname{sen} 2\varphi) \cdot (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi) \\ &= \cos 3\varphi + j \operatorname{sen} 3\varphi.\end{aligned}$$

Podemos, por tanto, generalizar y escribir la potencia m:

$$\boxed{(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)^m = \cos m\varphi + j \operatorname{sen} m\varphi}$$

Es la fórmula de Moivre.

Aplicación. — *Calcular* $\cos 3a$ *y* $\operatorname{sen} 3a$.

Tenemos:

$$\begin{aligned}\cos 3a + j \operatorname{sen} 3a &= (\cos a + j \operatorname{sen} a)^3 \\ &= \cos^3 a + 3 \cos^2 a \cdot j \operatorname{sen} a + 3 \cos a \cdot j^2 \operatorname{sen}^2 a + j^3 \operatorname{sen}^3 a,\end{aligned}$$

o sea: $j^3 = -j$, de donde:

$$= (\cos^3 a - 3 \cos a \cdot \operatorname{sen}^2 a) + j(3 \cos^2 a \cdot \operatorname{sen} a - \operatorname{sen}^3 a).$$

Identifiquemos, es decir, igualemos las partes reales y las partes imaginarias:

$$\begin{cases} \cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a \cdot \operatorname{sen}^2 a \\ \operatorname{sen} 3a = 3\cos^2 a \cdot \operatorname{sen} a - \operatorname{sen}^3 a \end{cases}$$

o sea:

$$\begin{cases} \cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a(1 - \cos^2 a) \\ \operatorname{sen} 3a = 3(1 - \operatorname{sen}^2 a)\operatorname{sen} a - \operatorname{sen}^3 a \end{cases}$$

o, finalmente:

$$\begin{cases} \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \\ \operatorname{sen} 3a = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a. \end{cases}$$

Inversamente, estas dos últimas fórmulas permiten obtener $\operatorname{sen}^3 a$ y $\cos^3 a$, en función de $\operatorname{sen} 3a$ o de $\cos 3a$, en primer grado, fórmulas utilizadas en el cálculo integral.

—Operaremos del mismo modo para calcular $\cos ma$ y $\operatorname{sen} ma$. Se desarrolla:

$$(\cos ma + j \operatorname{sen} ma) = (\cos a + j \operatorname{sen} a)^m$$

por la fórmula del binomio y se identifica.

— Veremos más adelante otras aplicaciones de la fórmula de MOIVRE.

Caso en que m es negativo. La fórmula de MOIVRE se aplica también cuando m es negativo:

$$(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)^{-m} = \cos(-m\varphi) + j \operatorname{sen}(-m\varphi) = \cos m\varphi - j \operatorname{sen} m\varphi.$$

En efecto, tenemos:

$$(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)^{-m} = \frac{1}{(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)^m} = \frac{1}{(\cos m\varphi + j \operatorname{sen} m\varphi)}$$

$$= \frac{\cos m\varphi - j \operatorname{sen} m\varphi}{\cos^2 m\varphi + \operatorname{sen}^2 m\varphi} = \cos m\varphi - j \operatorname{sen} m\varphi.$$

c.q.d.

La regla se aplica también, si m es fraccionario, positivo o negativo:

$$(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)^{\frac{p}{r}} = \cos \frac{p}{r}\varphi + j \operatorname{sen} \frac{p}{r}\varphi.$$

Bastará elevar a la potencia r y operar como anteriormente.

Ejemplo: Escribir $(3 - 7j)^{-3}$ con la forma $a + jb$.

— Tenemos:

$$3 - 7j = \sqrt{58}\,(\cos\varphi + j\,\text{sen}\,\varphi), \quad \text{siendo} \quad \varphi = 293^\circ$$

y

$$\begin{aligned}(3 - 7j)^{-3} &= 58^{-3/2}\,(\cos 293^\circ + j\,\text{sen}\,293^\circ)^{-3} \\ &= 0{,}0022\,[\cos(-879^\circ) + j\,\text{sen}\,(-879^\circ)] \\ &= 0{,}0022\,(\cos 200^\circ + j\,\text{sen}\,200^\circ) = 0{,}0022\,(-\cos 20^\circ - j\,\text{sen}\,20^\circ) \\ &= 0{,}0022\,(-0{,}937 - j\,0{,}348) \\ &= -10^{-4}\,(21 + 7{,}9j).\end{aligned}$$

43. Cociente de dos complejos. — REGLA. — *El cociente de dos complejos es, en general, un complejo. Su valor real es el cociente de sus dos valores reales, y su desfase es la diferencia de los dos desfases.*

En efecto, sea:

$$\frac{a + jb}{c + jd}$$

Multipliquemos arriba y abajo por la cantidad conjugada del denominador, es decir, por $c - jd$:

$$\frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{ac + jbc - jda - j^2bd}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = m + jn,$$

que es, por tanto, un complejo (salvo si $bc = ad$).

El valor real es:

$$r = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd + b^2c^2 + a^2d^2 - 2bcad}{(c^2 + d^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)}{(c^2 + d^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{(c^2 + d^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Que es el cociente de dos cantidades reales. Calculemos ahora el desfase.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{n}{m} = \frac{\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}}{\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}} = \frac{bc-ad}{ac+bd},$$

dividamos arriba y abajo por ac:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{b}{a} - \dfrac{d}{c}}{1 + \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{d}{c}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2),$$

de donde

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \qquad \text{c.q.d.}$$

Ejemplo: Sea $\dfrac{3+4j}{1+j}$

siendo:

$$r_1 = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{4}{3} \qquad \text{y} \qquad \varphi_1 = 53^\circ$$

$$r_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{y} \qquad \varphi_2 = 45^\circ$$

Tenemos:

$$r = \frac{5}{\sqrt{2}} = \sqrt{12{,}5} = 3{,}53 \qquad \text{y} \qquad \varphi = 53^\circ - 45^\circ = 8^\circ$$

En la segunda forma tendríamos:

$$3{,}53\,(\cos 8^\circ + j \operatorname{sen} 8^\circ)$$

y en la tercera:

$$3{,}53 \cdot e^{8^\circ j}.$$

Pero, si no se conociera ni r_1 ni r_2, escribiríamos:

$$\frac{3+4j}{1+j} = \frac{(3+4j)\,(1-j)}{1+1} = \frac{(3+4)+j(4-3)}{2} = 3{,}5 + \frac{1}{2}j,$$

de donde

$$r = \sqrt{3{,}5^2 + 0{,}5^2} = 3{,}53$$

y

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{0{,}5}{3{,}5} \quad \text{de donde} \quad \varphi = 8°.$$

En resumen, cuando tenemos un cociente $\dfrac{a+jb}{c+jd}$, se multiplica arriba y abajo por $c-jd$, se desarrolla para poner el conjunto en la forma $m+jn$, lo cual nos da en seguida tg φ y el valor real $\sqrt{m^2+n^2}$.

Por la tercera forma el cociente se obtiene en seguida:

$$\frac{3+4j}{1+j} \quad \text{o bien} \quad \frac{5e^{53j}}{\sqrt{2}e^{45j}} = 3{,}53e^{8j} \quad \text{o bien} \quad 3{,}53^{/8}$$

Que se enuncia así: «3,53 defasado en + 8°».

44. Inverso de un complejo. — REGLA. — *El inverso de un complejo es otro complejo. Su valor real es el inverso del valor real y su desfase es el mismo, pero cambiado de signo.*

En efecto, tenemos:

$$\frac{1}{a+jb} = \frac{a-jb}{(a+jb)(a-jb)} = \frac{a-jb}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2} = m-jn,$$

de donde:

$$r = \sqrt{m^2+n^2} = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{r_1}.$$

El desfase viene dado por:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-n}{m} = -\frac{\dfrac{b}{a^2+b^2}}{\dfrac{a}{a^2+b^2}} = -\frac{b}{a} = -\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(-\varphi_1),$$

por tanto:

$$\varphi = -\varphi_1. \qquad \text{c.q.d.}$$

Ejemplo: Sea:

$$\frac{1}{3+4j} = \frac{1}{a+jb} \qquad (r_1 = 5 \quad \text{y} \quad \varphi_1 = 53°).$$

El valor real será:

$$r = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{5}$$

siendo $\varphi = -53^\circ$.

Caso de la segunda forma. Se tendría:

$$\frac{1}{\cos\varphi + j\,\text{sen}\,\varphi} = \frac{\cos\varphi - j\,\text{sen}\,\varphi}{(\cos\varphi + j\,\text{sen}\,\varphi)\,(\cos\varphi - j\,\text{sen}\,\varphi)}$$

$$= \frac{\cos\varphi - j\,\text{sen}\,\varphi}{\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi} = \cos\varphi - j\,\text{sen}\,\varphi,$$

o también:

$$= \cos(-\varphi) + j\,\text{sen}\,(-\varphi),$$

lo cual nos muestra que el desfase es $-\varphi$.

Del mismo modo, por la tercera forma tendríamos:

$$\frac{1}{3 + 4j} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{5}e^{-53j} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{5}\angle -53$$

45. Potencia de un complejo. — REGLA. — *La potencia n de un complejo es también un complejo. Su valor real es igual a la potencia n del valor real, y su desfase es n veces mayor.*

Esto es una consecuencia de la multiplicación:

$$(a + jb)^n = \underbrace{(a + jb)\,(a + jb)\,\ldots\,(a + jb)}_{n \text{ veces}}.$$

Sea por tanto:

$$a + jb \quad \text{donde} \quad r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \text{tg}\,\varphi_1 = \frac{b}{a}.$$

Para $(a + jb)^n$ se tendrá:

$$r^n = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \quad \text{y} \quad \varphi = n \cdot \varphi_1.$$

En la tercera forma se tendría:

$$(r\,e^{j\varphi})^n = r^n\,e^{jn\varphi}$$

así, por ejemplo, se tiene $(2e^{4j})^3 = 8e^{12j}$ o bien $8\angle 12$.

46. Raíz cuadrada de un complejo $\sqrt{a + jb}$.

REGLA. — *La raíz cuadrada de un complejo es también un complejo. Su valor real es la raíz cuadrada del valor real, y su desfase es la mitad.*

Basta hacer $n = \frac{1}{2}$ en la regla anterior.

Ejemplo: Sea: $\sqrt{3 + 4j}$.

Pongamos $\sqrt{3 + 4j} = m + nj$, y calculemos m y n.

Elevemos al cuadrado:

$$3 + 4j = m^2 + j^2n^2 + 2jmn = m^2 - n^2 + 2jmn,$$

identifiquemos:

$$3 = m^2 - n^2 \quad \text{y} \quad 4 = 2mn.$$

de donde:

$$m = \frac{2}{n}$$

y

$$3 = \frac{4}{n^2} - n^2$$

o sea:

$$n^4 + 3n^2 - 4 = 0,$$

lo cual nos da:

$$n^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = +1 \quad \text{y} \quad -4.$$

Solamente el valor $+1$ conviene y $n = \pm 1$, de donde:

$$m = \pm 2.$$

Se tendrá por tanto $+m + jn$ o bien $-m - jn$, cuyos módulos son idénticos.

— Inversamente un número complejo tiene siempre dos raíces cuadradas imaginarias reales y de signos contrarios; en particular, -1 tiene por raíces $\pm j$.

— El valor real será:

$$\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{2^2 + 1} = 2{,}23$$

y el desfase vendrá dado por:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{n}{m} = \frac{1}{2} \qquad \left(\text{o bien} \quad \frac{-1}{-2}\right)$$

de donde:

$$\varphi \simeq 26^\circ\, 30'$$

que es la mitad del desfase 53° del vector $3 + 4j$.

OBSERVACIÓN. — Si tuviéramos $\sqrt{-a \pm jb}$, se escribiría:

$$\sqrt{-1\,(a \mp jb)} = j\sqrt{a \mp jb}.$$

Se calcula esta raíz cuadrada y luego se multiplica por j.

— Así, por ejemplo:

$$\sqrt{-21 + 16j} = j\sqrt{21 - 16j} = j(4{,}8 - 1{,}6j) = 1{,}6 + 4{,}8j$$

Del mismo modo, se tiene:

$$\sqrt{25e^{8j}} = 5e^{4j} \quad \text{o bien} \quad 5^{/4}.$$

47. Ejercicios diversos. — 1.° Calcular el valor real de la expresión siguiente, que representa, en electricidad, la impedancia equivalente de una bobina de inducción en paralelo con una resistencia:

$$\frac{jRL\omega}{R + jL\omega} = \frac{0 + jb}{c + jd},$$

el valor real es:

$$\frac{b}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{RL\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

El desfase del numerador es $\varphi_1 = +90^\circ$, el del denominador viene dado por:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{d}{c} = \frac{L\omega}{R}$$

y

$$\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{L\omega}{R}$$

de donde

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 90^\circ - \varphi_2$$

por tanto:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{R}{L\omega}.$$

2.° Sea la igualdad:

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{m + jn}{p + jq}$$

Sacamos:

$$(a + jb)(p + jq) = (m + jn)(c + jd)$$

o sea:

$$(ap - bq) + j(bp + aq) = (mc - nd) + j(nc + md).$$

Identifiquemos, lo cual nos da las dos igualdades:

$$\begin{cases} ap - bq = mc - nd \\ bp + aq = nc + md \end{cases}$$

48. Representación de la derivada de una función sinusoidal por un complejo. — Sea $y = A \operatorname{sen} \omega t$.

Sabemos que en la representación vectorial, utilizada en corriente alterna, este valor instantáneo viene representado por un vector horizontal, dirigido hacia la derecha e igual a + A.

Tenemos la derivada:

$$y' = A\omega \cos \omega t = A\omega \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right).$$

Pero, sabemos que:

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right),$$

se tendrá, por tanto:

$$y' = A\omega \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right),$$

así, esta expresión vendrá representada por un vector de longitud igual a $A\omega$ y desfasado en + 90°. Esta derivada vendrá, por tanto, representada por la expresión compleja siguiente:

$$\overline{y'} = + jA\omega.$$

Estas expresiones sirven corrientemente en electricidad para el estudio de la corriente alterna.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE. — Veremos las diferentes aplicaciones de los complejos en el *Cálculo integral* (3er Tomo), así como en las ecuaciones diferenciales. Entonces los utilizaremos en ciertas aplicaciones eléctricas.

49. Observaciones diversas sobre las exponenciales complejas. — 1.° Puesto que:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi,$$

se deduce:

$$e^{2\pi j} = \cos 2\pi + j \operatorname{sen} 2\pi = 1 + j \cdot 0 = 1.$$

Es decir, esta expresión es igual a 1. Por tanto, se tendrá:

$$e^{x} = e^{x}(\cos 2\pi + j \operatorname{sen} 2\pi) = e^{x}e^{2\pi j} = e^{x+2\pi j},$$

que llamamos e^{y}.

Se deduce que la función e^{y}, para y imaginario, es periódica y de período $2\pi j$.

2.° No olvidar que se puede siempre escribir:

$$e^{\alpha + j\gamma} = e^{\alpha}e^{j\gamma} = e^{\alpha}(\cos\gamma + j \cdot \operatorname{sen}\gamma)$$

expresión utilizada en electricidad.

3.° Por fin, se puede escribir:

$$e^{j\pi} = -1.$$

En efecto,

$$e^{j\pi} = \cos\pi + j \operatorname{sen}\pi = -1 + j \cdot 0 = -1.$$

Tenemos así reunidos en una sola expresión los tres números e, j y π.

50. Raíces cúbicas y raíces emésimas de un número complejo. — La fórmula de MOIVRE:

$$(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi)^{m} = \cos m\varphi + j \cdot \operatorname{sen} m\varphi$$

es muy cómoda en un gran número de cálculos, en particular para calcular las raíces cúbicas y las raíces emésimas.

Tomemos primero el caso del cuadrado, y sea:

$$X^2 = r(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi).$$

Pongamos entonces:

$$X = \rho(\cos\omega + j \operatorname{sen}\omega)$$

y calculemos ρ y ω.

Se tendrá:

$$X^2 = \rho^2(\cos 2\omega + j \operatorname{sen} 2\omega),$$

lo cual nos da:

$$\text{y} \quad \left| \begin{array}{l} \rho^2 = r \\ 2\omega = \varphi + 2K\pi \quad \text{o bien} \quad \omega = \dfrac{\varphi}{2} + K\pi. \end{array} \right.$$

Por tanto, hay un solo valor de ρ y una infinidad de valores para ω. Tenemos, por fin, dos soluciones para X según que K sea par o impar:

$$X = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + j\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

y

$$X = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right] = -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + j\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

Se ve claramente que tenemos dos valores de X, iguales y de signos contrarios.

Sea ahora un número real y negativo $r = -a$. Es un vector horizontal, y defasado $+\pi$.

Busquemos su raíz cuadrada. Según lo que hemos visto más arriba, ésta es igual a

$$X = \sqrt{-a}\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Se tendrá, por tanto, dos valores:

$$X = j\sqrt{-a} \quad \text{y} \quad X = -j\sqrt{-a}.$$

Es decir, que para $\sqrt{-1}$ tenemos j y $-j$.

— Calculemos ahora $\sqrt{j}$. Pero j viene representado por un vector igual a $+1$ y defasado de $+\frac{\pi}{2}$.

Se tendrá, por tanto:

$$X = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right),$$

de donde

$$\text{y} \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{j} = \dfrac{1+j}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{j} = \dfrac{-(1+j)}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

Raíz emésima. — Sea $A = r(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi)$ y calculemos X tal que:

$$X^m = A \quad \text{o bien} \quad X^m - A = 0$$

llamado algunas veces *ecuación binomia.*

Pongamos:

$$X = \rho(\cos\omega + j \operatorname{sen}\omega),$$

y calculemos ρ y ω.

Tenemos:

$$X^m = \rho^m(\cos m\omega + j \operatorname{sen} m\omega) = A,$$

lo cual nos da:

$$\left|\begin{array}{lll} \rho^m = r & \text{y} & \rho = \sqrt[m]{r} \\ m\omega = \varphi + 2K\pi & \text{y} & \omega = \dfrac{\varphi}{m} + \dfrac{2K\pi}{m}. \end{array}\right.$$

Hagamos:

$$K = mq + p,$$

lo cual nos da:

$$\frac{2K\pi}{m} = 2q\pi + 2p\frac{\pi}{m}$$

pero $2q\pi$, no tiene influencia sobre X, y

$$\omega = \frac{\varphi}{m} + \frac{2p\pi}{m}$$

con m valores para p. Se deduce que:

Un número A *posee* m *raíces emésimas,* que son:

$$X = \sqrt[m]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2\pi p}{m}\right) + j \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2\pi p}{m}\right)\right]$$

Ejemplos: 1.° Calcular $\sqrt[3]{1}$.

Hagamos:

$$X^3 = 1. \quad \text{Se tiene} \quad r = 1 \quad \varphi = 0,$$

de donde:

$$X = 1\left(\cos\frac{2p\pi}{3} + j \operatorname{sen}\frac{2p\pi}{3}\right)$$

donde p toma los valores 0, 1, 2, por tanto:

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + j\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + j\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hay que observar que X_3 es el cuadrado de X_2, en efecto:

$$\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (!)$$

Hagamos:

$$X_2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha$$

por tanto:

$$X_3 = \alpha^2.$$

Es decir, las raíces cúbicas de 1 son 1, α y α^2.

Por otra parte, por álgebra, tenemos $x^3 - 1 = 0$.

Se ve que 1 es raíz, por tanto dividiendo por $x - 1$, se encontraría:

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1,$$

ecuación cuyas raíces, imaginarias, son:

$$\frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} = X_2 \quad \text{y} \quad X_3.$$

— Se vería del mismo modo que:

$$\text{las } \sqrt[4]{1} \text{ son } \quad 1, -1, j \text{ y } -j,$$

$$\text{las } \sqrt[6]{1} \text{ son } \quad 1, \alpha, \alpha^2, -1, -\alpha, \text{ y } -\alpha^2.$$

— 2.° Del mismo modo, calcular las raíces de la ecuación:

$$x^5 = 7.$$

Se tendrá:

$$\rho^5(\cos 5\omega + j\,\text{sen}\,5\omega) = 7\,(\cos 2\pi + j\,\text{sen}\,2\pi).$$

de donde

$$\left|\begin{array}{l} \rho = \sqrt[5]{7} \\ 5\omega = 2K\pi \quad \text{y} \quad \omega = \dfrac{2K\pi}{5}, \end{array}\right.$$

y

dando a K los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5, se tendrán las cinco raíces buscadas.

51. Fórmulas de Euler. — Hemos desarrollado, más arriba, en serie de MAC-LAURIN e^{jx} y e^{-jx} y hemos encontrado:

$$\boxed{\begin{aligned} e^{jx} &= \cos x + j \cdot \operatorname{sen} x \\ e^{-jx} &= \cos x - j \cdot \operatorname{sen} x \end{aligned}}$$

Estas son las fórmulas de EULER, muy útiles.

Se pueden deducir las dos fórmulas siguientes, sumando y restando miembro a miembro:

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x$$
$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j \cdot \operatorname{sen} x$$

de donde sacamos:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{jx} + e^{-xj}}{2} \\ \operatorname{sen} x &= \frac{e^{jx} - e^{-xj}}{2j} \end{aligned}}$$

¡Es curioso poder expresar un coseno y un seno, reales, en función de dos exponenciales complejas!

Estas fórmulas nos servirán en el cálculo integral. Mostremos ahora una aplicación al cálculo de $\cos^m x$ y $\operatorname{sen}^m x$.

52. Cálculo de $\cos^m x$ y de $\operatorname{sen}^m x$. — 1.° Tenemos:

$$\cos^m x = \left(\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}\right)^m = \frac{1}{2^m}(e^{jx} + e^{-jx})^m$$

Basta desarrollar $(a + b)^m$ por la fórmula del binomio, después de agrupar los términos de la manera que vamos a indicar. Se simplifica después.

— Sea, por ejemplo, el cálculo de $\cos^4 x$:

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^4}(e^{jx} + e^{-jx})^4 = \frac{1}{10}(e^{4jx} + 4e^{3jx} \cdot e^{-jx} + 6e^{2jx} \cdot e^{-2jx} + 4e^{jx} \cdot e^{-3jx} + e^{-4jx}).$$

Efectuemos los productos exponenciales:

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}(e^{4jx} + 4e^{2jx} + 6 + 4e^{-2jx} + e^{-4jx}),$$

sumemos los términos equidistantes del centro:

$$= \frac{1}{16}[(e^{4jx} + e^{-4jx}) + 4(e^{2jx} + e^{-2jx}) + 6]$$

pero, según las fórmulas de EULER, el primer paréntesis es igual a $2\cos 4x$ y el segundo a $2\cos 2x$. Se tendrá, por tanto:

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}[2\cos 4x + 4 \cdot 2\cos 2x + 6]$$

o por fin:

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}[\cos 4x + 4\cos 2x + 3].$$

2.° Del mismo modo, se tendría:

$$\operatorname{sen}^m x = \left(\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right)^m = \frac{1}{(2j)^m}(e^{jx} - e^{-jx})^m$$

desarrollamos $(a - b)^m$, y como más arriba, agrupando ciertos términos, todas las j desaparecen.

— Calculemos, por ejemplo, $\operatorname{sen}^5 x$:

$$\operatorname{sen}^5 x = \frac{1}{(2j)^5}(e^{jx} - e^{-jx})^5$$

$$= \frac{1}{32j^5}(e^{5jx} - 5e^{4jx}\cdot e^{-jx} + 10e^{3jx}\cdot e^{-2jx} - 10e^{2jx}\cdot e^{-3jx} + 5e^{jx}\cdot e^{-4jx} - e^{-5jx})$$

$$= \frac{1}{32j^5}(e^{5jx} - 5e^{3jx} + 10e^{jx} - 10e^{-jx} + 5e^{-3jx} - e^{-5jx}).$$

Agrupemos los términos equidistantes del centro:

$$= \frac{1}{32j^5}[(e^{5jx} - e^{-5jx}) - 5(e^{3jx} - e^{-3jx}) + 10(e^{jx} - e^{-jx})]$$

pero, según las fórmulas de EULER, el primer paréntesis es igual a $2j \operatorname{sen} 5x$, el segundo es $2j \operatorname{sen} 3x$ y el último $2j \operatorname{sen} x$, lo cual nos da:

$$\operatorname{sen}^5 x = \frac{1}{32j^5}[2j \cdot \operatorname{sen} 5x - 10j \cdot \operatorname{sen} 3x + 20j \cdot \operatorname{sen} x]$$

$$= \frac{1}{32j^4}(2\operatorname{sen} 5x - 10\operatorname{sen} 3x + 20\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{1}{16}(\operatorname{sen} 5x - 5\operatorname{sen} 3x + 10\operatorname{sen} x).$$

53. Descomposición de sen x y cos x para x complejo. — 1.° Sustituyamos, en la fórmula EULER, x por jx, lo cual nos da:

$$\cos jx = \frac{e^{-x} + e^{+x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

que es real. Del mismo modo tenemos:

$$\operatorname{sen} jx = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2j} = j\,\frac{(e^{-x} - e^{x})}{2j^2} = j\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)$$

que es complejo.

Estas relaciones nos servirán más adelante cuando estudiemos las líneas trigonométricas hiperbólicas (Ver Tomo III: Cálculo Integral).

2.° Se puede demostrar que las fórmulas de adición de arcos

$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

se aplican también a los complejos.

— En efecto, se puede escribir:

$$e^{(a+b)j} = e^{ja} \cdot e^{jb}$$

o bien:

$$\cos (a + b) + j \operatorname{sen} (a + b) = (\cos a + j \operatorname{sen} a)(\cos b + j \operatorname{sen} b)$$
$$= (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) + j (\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a),$$

de donde, identificando, se encuentran las conocidas fórmulas:

$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

y

$$\operatorname{sen} (a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a.$$

3.° Calculemos ahora sen x y cos x en el caso en que:

$$x = a + jb.$$

Tenemos, según lo que hemos visto más arriba:

$$\cos x = \cos (a + jb) = \cos a \cdot \cos jb - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} jb$$
$$= \cos a \left(\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}\right) - \operatorname{sen} a \cdot j \left(\frac{e^{b} - e^{-b}}{2}\right)$$

que se puede poner por la forma:

$$\cos x = \mathrm{A} + jb,$$

es por tanto complejo; y ocurriría lo mismo para sen x.

54. Logaritmo de un complejo. — Sea la expresión:

$$r(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi).$$

Tomemos aquí el logaritmo neperiano y escribamos:

$$\operatorname{Log} r(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi) = a + jb,$$

y calculemos a y b.

— Tenemos, remontando del logaritmo, al número:

$$r(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi) = e^{(a+jb)} = e^a \cdot e^{jb} = e^a(\cos b + j \operatorname{sen} b).$$

Identifiquemos:

$$\left| \begin{array}{l} r = e^a \quad \text{y} \quad a = \operatorname{Log} r \\ b = \varphi + 2\mathrm{K}\pi, \end{array} \right.$$

de donde:

$$a + jb = \operatorname{Log} r + j(\varphi + 2\mathrm{K}\pi).$$

Que es por tanto también un complejo, y los valores de a y de b se calculan fácilmente identificando.

55. Aplicación eléctrica numérica. — Supongamos una línea telefóniva muy larga donde la diferencia de potencial en la entrada es:

$$v = \mathrm{V} \operatorname{sen} \omega t.$$

Se demuestra que la corriente tiene por valor, expresada en forma compleja:

$$i = \mathrm{V} \sqrt{\frac{g + jc\omega}{r + jl\omega}} \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

donde r es la resistencia por unidad de longitud (el conjunto de los dos hilos).

l es la inductancia por unidad de longitud,

c es la capacidad por unidad de longitud, de los dos hilos entre sí,

g es la conductancia de fuga $\left(\frac{1}{r'}\right)$ por unidad de longitud entre los dos hilos.

Calcular la intensidad i de corriente.

— Tomemos los valores complejos bajo la segunda forma:

$$g + jc\omega = \sqrt{g^2 + c^2\omega^2}\,(\cos\alpha + j \operatorname{sen}\alpha), \quad \text{siendo} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{c\omega}{g}$$

$$r + jl\omega = \sqrt{r^2 + l^2\omega^2}\,(\cos\beta + j \operatorname{sen}\beta), \quad \text{siendo} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{l\omega}{r}$$

y

$$V\sqrt{\frac{g + jc\omega}{r + jl\omega}} = V\left(\frac{g^2 + c^2\omega^2}{r^2 + l^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{\cos\alpha + j\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\beta + j\,\text{sen}\,\beta}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para simplificar la escritura, llamaremos A al primer paréntesis a la potencia $\frac{1}{4}$, de donde:

$$= AV[\cos(\alpha - \beta) + j\,\text{sen}\,(\alpha - \beta)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= AV\left[\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right].$$

El desfase de i sobre v es por tanto $\frac{\alpha - \beta}{2}$, y se tendrá, en valor real:

$$i = AV \cdot \text{sen}\left[\omega t + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right].$$

APLICACIÓN NUMÉRICA:

Para una línea de 1 km de longitud, tenemos:

$r = 6$ ohms, $l = 3 \cdot 10^{-3}$ henrios, $c = 5 \cdot 10^{-9}$ faradios,

$g = \frac{1}{r'} = 3 \cdot 10^{-6}$ ohm^{-1}, $\omega = 6 \cdot 10^3$, V = 1 voltio

Tenemos:

$$A = \left[\frac{9 \cdot 10^{-12} + 25 \cdot 10^{-18} \cdot 36 \cdot 10^6}{36 + 9 \cdot 10^{-6} \cdot 36 \cdot 10^6}\right]^{\frac{1}{4}} = 1{,}26 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{5 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-6}} = 10 \qquad \alpha = 84°18'$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^3}{6} = 3 \qquad \beta = 71°35'$$

y

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 6°22'.$$

Se tendrá por tanto, en amperios, para la intensidad de corriente:

$$i = 1{,}26 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen}\,(6.000t + 6°22')$$

o bien en miliamperios:

$$i = 1{,}26 \cdot \operatorname{sen}\,(6.000t + 6°22').$$

OBSERVACIÓN. — El cociente $\frac{V}{I}$ de los valores máximos se llama *impedancia característica* de la línea, o sea aquí:

$$Z = \sqrt{\frac{r + jl\omega}{g + jc\omega}}$$

o bien, en valor real.

$$Z = \sqrt[4]{\frac{r^2 + l^2\omega^2}{g^2 + c^2\omega^2}}.$$

En general, en una buena línea, bien aislada, tenemos:

$$r^2 \ll l^2\omega^2 \qquad \text{y} \qquad g^2 \ll c^2\omega^2,$$

de donde:

$$\boxed{Z = \sqrt{\frac{l}{c}}}$$

valor independiente de la frecuencia, lo cual es notable.

TERCERA PARTE

CALCULO DIFERENCIAL

CAPITULO VI

PRELIMINARES E INFINITESIMOS

56. El cálculo diferencial e integral fue inventado por NEWTON y LEIBNITZ mediante una forma todavía un poco... nebulosa, y como consecuencia de un gran número de trabajos matemáticos llegaron al estudio de las derivadas, de las tangentes a las curvas y a los *infinitésimos*. Este cálculo fue después puesto a punto por diversos matemáticos (EULER, LAPLACE, CAUCHY, etc.) que le dieron su forma actual.

— El álgebra existía antes de *Jesucristo* y el célebre ARQUÍMEDES sabía resolver ciertas ecuaciones de segundo grado; debemos señalar que desde el momento de la llegada de LEIBNITZ *y* NEWTON, han pasado solamente trescientos años y este cálculo es ya sutil y trascendente. Exige una cierta preparación del espíritu y *puede ser abordado solamente por los que conozcan ya las derivadas* (Ver el Tomo I).

— Este cálculo es muy amplio y de innumerables aplicaciones.

En este Tomo II estudiamos el cálculo diferencial, así como algunas de sus aplicaciones. Los Tomos III, IV y V están consagrados al cálculo integral y a sus aplicaciones.

— Que el lector tenga un poco de paciencia, si al principio, encuentra dificultades para asimilar la noción de diferencial, que es la base de todo lo demás; después se alegrará de poder pasar a aplicaciones, admirando profundamente a los fundadores de este cálculo.

— No tememos en afirmar aquí, que en un gran número de libros es *escandalosa,* la forma de exponer, y, sobre todo, la definición de diferencial, así como la manera de utilizarla.

— Que el lector tenga la seguridad de que le explicaremos *clara* y *detalladamente,* lo que es la diferencial, base de todo este cálculo; y seguidamente, un gran número de aplicaciones complementarán estas explicaciones.

— Después, el cálculo diferencial e integral no se separarán, ayudándose mutuamente en las aplicaciones prácticas, que daremos en gran número y claramente explicadas. Lo que cuenta para nosotros y para el lector son: *las aplicaciones prácticas.*

— Antes de llegar a la noción de diferencial, que es una noción sutil, y *sin embargo muy clara,* juzgamos indispensable el comenzar por algunas explicaciones preparatorias y en particular por el estudio de los *infinitésimos.*

LOS INFINITESIMOS

57. Preliminares. — Antes de precisar lo que se llama *infinitésimo,* veamos rápidamente (lo que por otra parte, hemos hecho ya en el Tomo I) cómo, *y de qué manera,* las funciones siguientes:

$$y = ax \qquad y = ax^2 \qquad y = ax^3 \qquad \text{etc.,}$$

tienden hacia cero cuando x tiende hacia cero.

Dando a x diferentes valores numéricos, por ejemplo 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$ etc., se deducen los valores de y, lo cual nos da las curvas de la figura (12).

La parte interesante es la comprendida entre $x = 0$ y $x = 1$:

1.° $y = ax$

$$\begin{cases} \text{para } x = 1 & y = a \\ \text{para } x = \frac{1}{2} & y = \frac{a}{2} \\ \text{para } x = \frac{1}{10} & y = \frac{a}{10} \end{cases}$$

2.° $y = ax^2$

$$\begin{cases} \text{para } x = 1 & y = a \\ \text{para } x = \frac{1}{2} & y = \frac{a}{4} \\ \text{para } x = \frac{1}{10} & y = \frac{a}{100} \end{cases}$$

3.° $y = ax^3$ $\begin{cases} \text{para } x = 1 & y = a \\ \text{para } x = \dfrac{1}{2} & y = \dfrac{a}{8} \\ \text{para } x = \dfrac{1}{10} & y = \dfrac{a}{1000} \end{cases}$ etc.

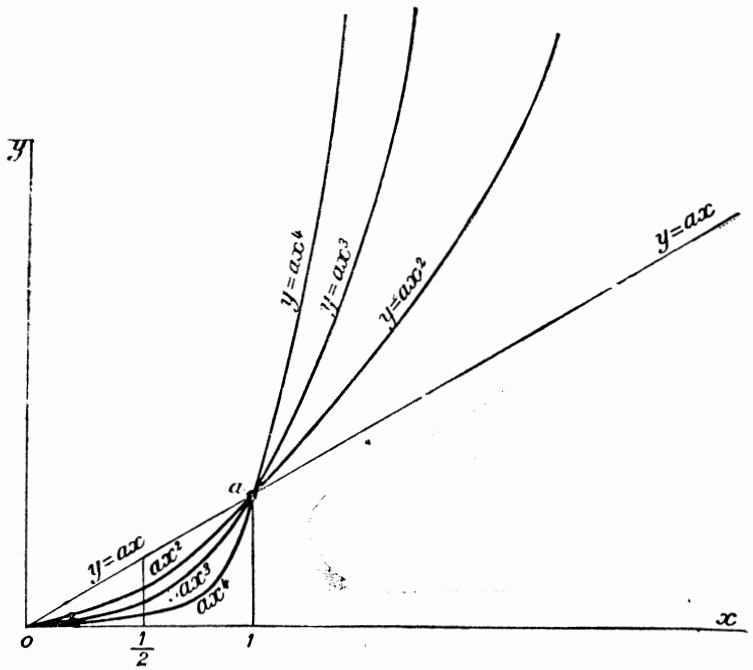

FIG. 12

Se ve así que, cuando x decrece de 1 hacia 0, *la función y decrece tanto más rápidamente cuanto mayor es el exponente de x. Dicho de otro modo, la curva se aproxima tanto más rápidamente al eje x, cuanto mayor es el exponente de x.*

Todas estas funciones se hacen infinitamente pequeñas cuando $x \to 0$, *pero no a la misma velocidad:*

ax^2 tiende hacia 0, mucho más rápidamente que ax
ax^3 tiende hacia 0, mucho más rapidamente que ax^2, etc.

Podríamos, por tanto, *clasificar* estas diferentes cantidades por la rapidez con que tienden hacia cero, y podríamos decir, comparando todas estas funciones con la función lineal $y = ax$, que en *las proximidades de cero*, la función $y = ax$ es de *primer* orden en pequeñez, y que la función ax^2 es de *segundo orden* y que la función ax^3 es de *tercer orden*; en resumen, el exponente de x indica el *grado* de pequeñez de la función, la palabra *grado* está tomada en el sentido vulgar, indicando un rango e incluso un orden.

— Vemos aquí, claramente, cómo estas funciones tienden hacia cero y cómo podemos clasificarlas; pero esto no ocurre siempre.

— Así, por ejemplo, la función $y = \operatorname{sen} x$ tiende hacia 0 cuando x tiende hacia 0, *pero no sabemos con qué velocidad.* ¿Decrece más o menos rápidamente que $y = ax$, o que $y = ax^2$, o que $y = ax^3$...? No lo sabemos todavía.

Del mismo modo, la expresión $1 - \cos x$ tiende a 0 cuando x tiende hacia 0, pero, ¿con qué velocidad? ¿Decrece más o menos rápidamente que $y = ax$, o que $y = ax^2$ o que $y = ax^3$...? Tampoco lo sabemos.

— Tenemos, por tanto, interés, cuando tratamos con una cantidad infinitamente pequeña, en *conocer con qué velocidad tiende hacia cero.* En una palabra, conocer su rango de pequeñez, su orden de pequeñez, con relación a una cantidad infinitamente pequeña conocida, que nos sirva como patrón de pequeñez.

— *Tenemos, por tanto, que crear una jerarquía en la pequeñez de una magnitud,* y este es el objeto del estudio de las cantidades infinitamente pequeñas.

58. Definición de un «Infinitésimo». — *Un infinitésimo es una cantidad variable que tiende hacia cero.*

— Así, por ejemplo, $y = \operatorname{sen} x$, cuando x tiende hacia cero, tiende hacia cero, y es por tanto un infinitésimo.

Del mismo modo, $1 - \cos x$ cuando x tiende hacia 0, tiende también hacia cero, es por tanto un infinitésimo.

— Su consideración solamente es útil cuando se les compara con otros infinitésimos.

— Así, hemos visto que la noción de derivada se deduce de la comparación del incremento Δy de la función y del incremento Δx de la variable, cuando este último tiende hacia cero (Δx y Δy son infinitésimos).

— El objeto de este capítulo es el dar reglas que permitan la comparación rápida de los infinitésimos, y estudiar con qué velocidad tienden hacia cero, es decir el «jerarquizarlos».

59. Infinitésimos equivalentes. — Sea u un infinitésimo (es decir, una cantidad **variable** *que tiende hacia cero*), *diremos que* u_1 *es equivalente a* u, *si la relación* $\frac{u}{u_1}$ *tiende hacia* 1, *cuando* u *y* u_1 *tienden hacia* 0.

Así, por ejemplo, hemos visto en el Tomo I, que el límite del cociente $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, cuando $x \to 0$, es igual a 1, por tanto el infinitésimo $\operatorname{sen} x$ es equivalente a x:

$$\operatorname{sen} x \equiv x \qquad \text{(cuando } x \to 0\text{)}.$$

Su denominación viene de la observación siguiente: si tenemos que calcular el cociente de dos infinitésimos $\frac{u}{v}$ en el límite, y si se conoce un infinitésimo u_1 equivalente a u, podremos escribir:

$$\frac{u}{v} = \frac{u_1}{v} \cdot \frac{u}{u_1}$$

de donde:

$$\text{límite}\,\frac{u}{v} = \lim \frac{u_1}{v} \cdot \lim \frac{u}{u_1} = \lim \frac{u_1}{v} \cdot 1 = \lim \frac{u_1}{v}.$$

Por tanto, en lugar de buscar el límite del cociente $\frac{u}{v}$, que puede ser difícil de calcular, buscaremos el límite del cociente $\frac{u_1}{v}$, que puede ser más fácil de calcular, o que se conoce ya.

Entre los infinitésimos equivalentes a un infinitésimo dado, tomaremos el más sencillo y el más cómodo. Veamos, por ejemplo, si se puede sustituir un infinitésimo cualquiera, función de x, por Ax^m, donde A y m son por el momento desconocidos.

— Este modo de escribir un infinitésimo, nos ha sido sugerido por el estudio de las curvas x^m.

— Es necesario, para esto, encontrar A y m de tal modo que:

$$\text{límite de } \frac{u}{Ax^m} = 1.$$

Buscaremos *primero* m, para que:

$$\frac{u}{x^m} \to a \text{ un límite A, no nulo.}$$

Haremos primero $m = 0$, después $m = 1$, después $m = 2$, etc., hasta el momento en que encontremos un límite finito.

Diremos entonces que Ax^m *es un infinitésimo equivalente a* u, ya que:

$$\frac{u}{Ax^m} \to 1 \qquad \text{(cuando } x \to 0\text{)}.$$

Se comprenderá mejor con ejemplos.

Ejemplos: 1.° *Calcular un infinitésimo equivalente a* sen x.

Primero observaremos que sen x es un infinitésimo, puesto que tiende hacia 0, cuando x tiende hacia 0.

— Es necesario, por tanto, encontrar m para que:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^m} \to \text{a un límite A, no nulo.}$$

Para $m = 0$, $\quad \lim \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^0} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$

por tanto $m = 0$ no nos conviene.

Para $m = 1$, $\lim \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$, como se demuestra en trigonometría, cuando $x \to 0$. Por tanto, $m = 1$ conviene y se puede escribir:

$$\operatorname{sen} x \equiv x$$

que es un infinitésimo de primer orden.

2.° Sea $u = 1 - \cos x$ (para $x = 0$).

Que es un infinitésimo, ya que $u = 0$ para $x = 0$.

— Es necesario encontrar A y m para que:

$$\frac{1 - \cos x}{x^m} \to \text{a un límite A, no nulo.}$$

— Sustituyamos $1 - \cos x$ por $2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$, que es igual, con el objeto de hacer los cálculos más sencillos:

Para $m = 0$, $\quad \lim \dfrac{2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}}{x^0} = \dfrac{2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}}{1} = 0,$

por tanto, $m = 0$ no nos conviene.

Para $m = 1$, $\lim \dfrac{2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}}{x^1} = \dfrac{2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{x} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

que se puede escribir:

$$= \lim \left(\frac{\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) = 1 \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0,$$

por tanto $m = 1$ no nos conviene.

Para $m = 2$:

$$\lim \frac{2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \lim \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} \right) = \lim \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \lim \left(\frac{\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

por tanto $m = 2$ conviene, y tendremos:

$$1 - \cos x \equiv A x^m \equiv \frac{1}{2} x^2$$

que es de segundo orden.

3.° Sea $u = 1 - \sqrt{1 + x}$ (para $x = 0$).

Tenemos $1 - 1 = 0$, es por tanto un infinitésimo.

Busquemos A y m para que

$$\frac{1 - \sqrt{1 + x}}{x^m} \to A \text{ (no nulo)} \qquad \text{cuando } x \to 0.$$

Aquí, cualquiera que sea m, encontraremos siempre $\dfrac{0}{0}$, que es indeterminado. Además, para ver más claro (!), multipliquemos arriba y abajo por la cantidad conjugada del numerador, o sea por

$1 + \sqrt{1+x}$, lo cual no cambia nada, ya que esta cantidad no es nula:

$$\frac{1-\sqrt{1+x}}{x^m} = \frac{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}{x^m(1+\sqrt{1+x})} = \frac{(a-b)(a+b)}{D} = \frac{a^2-b^2}{D}$$

$$= \frac{1-(1+x)}{D} = \frac{-x}{x^m(1+\sqrt{1+x})} = -\frac{1}{x^{m-1}(1+\sqrt{1+x})}.$$

Para $m = 0$, tenemos:

$$\lim \frac{-1}{x^{m-1}(1+\sqrt{1+x})} = \frac{-x}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{0}{2} = 0$$

por tanto, $m = 0$ no nos conviene.

Para $m = 1$, tenemos:

$$\lim \frac{-1}{x^{1-1}(1+\sqrt{1+x})} = \frac{-1}{1(1+\sqrt{1+x})} = -\frac{1}{2},$$

por tanto $m = 1$ conviene y podemos escribir:

$$\frac{1-\sqrt{1+x}}{x} \to -\frac{1}{2} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0.$$

Es decir:

$$1-\sqrt{1+x} \equiv -\frac{1}{2}x$$

que es de primer orden.

60. Orden y Parte principal de un infinitésimo. — *El número m definido más arriba se llama orden del infinitésimo, y* Ax^m, *que es equivalente al infinitésimo propuesto, se llama parte principal de este infinitésimo.*

— El orden indica la rapidez más o menos grande con la cual el infinitésimo considerado tiende hacia 0, como hemos explicado antes para las curvas ax, ax^2, ax^3... Recordamos que ax^2, tiende hacia cero mucho más rápidamente que ax, del mismo modo que ax^3 tiende hacia cero mucho más rápidamente que ax^2, etc.

— Por otra parte, decir que u es equivalente a Ax^m, es como decir que $\frac{u}{A \cdot x^m} \to 1$.

Podemos, por tanto, escribir *antes del límite.*

$$\frac{u}{A \cdot x^m} = 1 + \varepsilon$$

donde ε es una cantidad, *desconocida,* positiva o negativa, que tiende hacia cero al mismo tiempo que x.

Deducimos:

$$u = Ax^m(1 + \varepsilon)$$
$$= Ax^m + \varepsilon Ax^m.$$

Aparecen por tanto un primer término Ax^m, *y un segundo término, de valor desconocido, que no tiene ninguna importancia en el cálculo del límite, puesto que se hace cero en el límite, de ahí el nombre de «parte principal», que damos al primer término, que es el término preponderante:* Ax^m.

Por otra parte, el segundo término εAx^m es un infinitésimo de orden superior a m, *ya que es el producto de un infinitésimo* Ax^m *(de orden* m*) por otro infinitésimo.* Debido a esto, el segundo término tiende hacia 0 *mucho más rápidamente* que el primero, no tiene por tanto importancia y es despreciable.

Vemos así, por qué hemos escrito los infinitésimos con la forma Ax^m, puesto que el exponente m indica inmediatamente el orden de un infinitésimo, es decir, indica la rapidez, mayor o menor, con la cual este infinitésimo tiende hacia cero.

OBS-RVACIÓN. — Todas estas consideraciones son de la mayor importancia, para conducir al lector a la noción de *diferencial.*

REGLAS PARA EL CALCULO DE LOS INFINITESIMOS

61. TEOREMA I. — *La suma de dos infinitésimos del mismo orden es, en general, un infinitésimo del mismo orden, y en este caso la parte principal es la suma de las partes principales.*

Sea una suma de tres infinitésimos, de orden m, por ejemplo:

$$y = u + v + w.$$

Escribamos estos tres infinitésimos por la forma sencilla:

$$\left|\begin{array}{l} u = Ax^m(1 + \alpha) \\ v = Bx^m(1 + \beta) \\ w = Cx^m(1 + \gamma). \end{array}\right.$$

donde α, β y γ son cantidades (desconocidas) que tienden hacia cero, al mismo tiempo que x.

Tendremos:

$$y = x^m[(A + B + C) + (A\alpha + B\beta + C\gamma)],$$

se ve así que el orden de este infinitésimo es también m y la parte principal es $(A + B + C)\,x^m$.

Hay excepción si:

$$A + B + C = 0.$$

En este caso, nos queda:

$$y = x^m(A\alpha + B\beta + C\gamma),$$

el paréntesis tiende hacia 0, llamémoslo δ:

$$y = x^m\delta \qquad (\delta \to 0).$$

Vemos así que, incluso después de la división por x^m, $y \to 0$, por tanto m no es el orden.

— Si δ es él mismo de orden r, es decir si:

$$\frac{\delta}{x^r} \to \text{a un límite no nulo,}$$

entonces:

$$\frac{y}{x^m \cdot x^r} = \frac{y}{x^{m+r}} \to \text{hacia el mismo límite,}$$

por tanto, el orden es $m + r$. En todo caso, el orden es mayor que m.

OBSERVACIÓN. — Nunca debemos preocuparnos por la suma de infinitésimos de órdenes diferentes, puesto que la parte principal de esta suma es, sencillamente, la parte principal del término de orden inferior.

— En efecto, sea:

$$u = Ax^m(1 + \alpha)$$

y

$$v = Bx^m(1 + \beta) \qquad \text{donde} \quad p > m.$$

La suma será:

$$u + v = Ax^m(1 + \alpha) + Bx^p(1 + \beta)$$

de donde:

$$\frac{u + v}{x^m} = A(1 + \alpha) + Bx^{p-m}(1 + \beta)$$

y, si $x \to 0$, nos queda:

$$\frac{u + v}{x^m} \to A, \qquad (\alpha \text{ y } \beta \to 0)$$

por tanto, la parte principal de la suma es la misma que la de u.

Conclusión. — En los cálculos, cuando aparezcan sumas de infinitésimos de órdenes diferentes, nos limitaremos a escribir los infinitésimos de orden inferior, es decir, que se suprimen, pura y simplemente, los infinitésimos de orden superior.

62. TEOREMA II. — *El producto de varios infinitésimos es un infinitésimo cuyo orden es la suma de los órdenes, y cuya parte principal es el producto de las partes principales de cada factor.*

Sean, en efecto, los dos infinitésimos:

$$\left.\begin{aligned} u &= Ax^m(1+\alpha) \\ v &= Bx^m(1+\beta) \end{aligned}\right\} \quad \text{(de donde } \alpha \text{ y } \beta \text{ tienden hacia 0 al mismo tiempo que } x\text{).}$$

Tendremos:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= ABx^{m+p}(1+\alpha)(1+\beta) \\ &= AB \cdot x^{m+p}(1+\delta) \qquad \text{donde } \delta \to 0. \end{aligned}$$

Por tanto, el producto es un infinitésimo cuyo orden es $m + p$, y la parte principal es el producto de las partes principales de cada factor (todo esto es, en suma, una consecuencia de las reglas de cálculo de los exponentes).

63. TEOREMA III. — *El cociente de dos infinitésimos es también un infinitésimo, siempre que el numerador sea de orden superior al denominador, y en este caso, el orden es la diferencia de los órdenes, y la parte principal del cociente es el cociente de las dos partes principales.*

Sea:

$$u = Ax^m(1+\alpha)$$

y

$$v = Bx^p(1+\beta) \qquad \text{donde } m > p$$

Se tendrá:

$$\frac{u}{v} = \frac{A}{B}x^{m-p}\frac{(1+\alpha)}{(1+\beta)} = \frac{A}{B}x^{m-p}(1+\delta)$$

poniendo, ya que α y β tienden hacia 0 al mismo tiempo que x,

$$\frac{1+\alpha}{1+\beta} = \frac{1}{1+\beta} + \frac{\alpha}{1+\beta} = 1+\delta \qquad \text{(donde } \delta \to 0\text{).}$$

El orden del cociente es, por tanto, $m - p$ y la parte principal es el cociente de las dos partes principales.

— Si los órdenes m y p son iguales, el cociente tiene un límite finito y no es un infinitésimo.

— Si el numerador es de orden inferior, el cociente de dos infinitésimos tiende hacia infinito. Tenemos un número infinitamente grande. No hemos explicado la parte teórica, pero considerando los inversos, se reduce a los casos precedentes.

64. Otro modo para encontrar el orden y la parte principal de un infinitésimo. — Otro procedimiento que es frecuentemente más cómodo y más rápido, consiste en desarrollar en serie de MAC-LAURIN el infinitésimo estudiado: *el término de menor grado dará el orden y la parte principal.*

Ejemplos:

1.°

$$y = \operatorname{sen} x \qquad \text{para} \qquad x = 0.$$

Se tendrá:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^m} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots}{x^m}$$

se ve que si hacemos $m = 1$, quedará simplificando:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \cdots$$

y, si $x \to 0$, nos queda 1 para el límite de este cociente, por consiguiente:

$$\operatorname{sen} x \equiv x.$$

2.°

$$y = 1 - \cos x \qquad \text{para} \qquad x = 0.$$

Tenemos:

$$\frac{1 - \cos x}{x^m} = \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots)}{x^m} = \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \cdots}{x^m},$$

si hacemos $m = 2$, nos queda:

$$= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} \cdots$$

y, si $x \to 0$, queda $\frac{1}{2}$, por tanto:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$$

y $1 - \cos x$ es un infinitésimo de segundo orden, cuya parte principal es $\frac{x^2}{2}$, es decir, el primer término del desarrollo de $1 - \cos x$.

3.° Encontrar la parte principal de:

$$y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$$

siendo x el infinitésimo principal.

Se puede escribir:

$$y = \sqrt[3]{x}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}\right)$$

pero, como hemos visto antes que:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \ldots$$

por tanto:

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/3} = \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^{1/3} = 1 - \frac{x^2}{18} + \ldots$$

de donde:

$$y = \sqrt[3]{x}\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{18} + \ldots\right)\right] = \sqrt{x}\left(\frac{x^2}{18} + \ldots\right),$$

la parte principal es por tanto $\frac{x^2\sqrt[3]{x}}{18} = \frac{1}{18}x^{\frac{7}{3}}$.

4.° Sea $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x$.

Tenemos:

$$y = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots\right) + \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots\right) = 2x + \ldots$$

por tanto el orden es 1 y la parte principal es $2x$.

OBSERVACIONES. — Todos estos teoremas y estos cálculos sobre los infinitésimos son muy instructivos desde el punto de vista matemático, ya que obligan al lector a precisar, de una manera clara, y por medio de expresiones algebraicas, las nociones que parecen nebulosas y oscuras.

65. Otro ejemplo de infinitésimo. Longitud del arco de curva comparado con la longitud de la cuerda (fig. 13). — Sea una curva cualquiera sobre la cual tomamos dos puntos próximos M y M'.

Tracemos la cuerda MM'.

— Vamos a demostrar que cuando el arco tiende hacia cero, el cociente $\frac{\text{arco}}{\text{cuerda}}$ tiende hacia 1:

$$\text{límite}\,\frac{\text{arc MM'}}{\text{cuerda MM'}} = 1$$

por tanto, se deduce que, *la longitud del arco* MM' *de una curva cualquiera es, en general, un infinitésimo de primer orden respecto a la cuerda.*

En efecto, tracemos la perpendicular M'P sobre MP que es la tangente a la curva en M, tenemos:

$$\text{cuerda MM'} < \text{arco MM'} < \text{MP} + \text{M'P},$$

puesto que un lado de un triángulo es más pequeño que la suma de los otros dos.

Pero $\text{MP} = \text{MM'} \cdot \cos\alpha$ y $\text{M'P} = \text{MM'} \cdot \operatorname{sen}\alpha$, por tanto:

$$\text{cuerda MM'} < \text{arco MM'} < \text{MM'}\,(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha),$$

y dividiendo por la cuerda MM':

$$1 < \frac{\text{arco MM'}}{\text{cuerda MM'}} < (\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha).$$

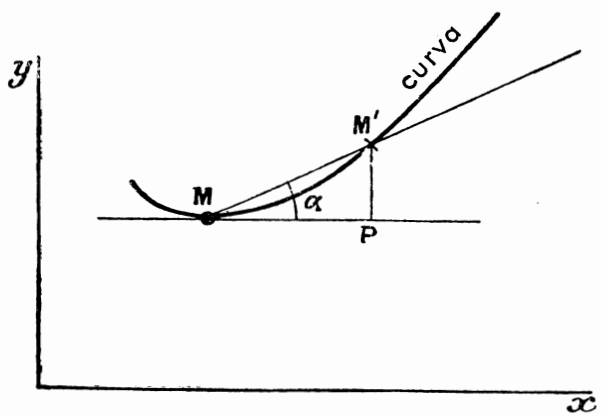

FIG. 13

Si ahora M′ se mueve a lo largo de la curva hasta confundirse con M, la cuerda MM′ gira alrededor de M, y en el límite, se confundirá con la tangente MP; $\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$ se hará igual a 1.

Por tanto el cociente $\frac{\text{arco MM}'}{\text{cuerda MM}'}$, *que está siempre comprendido entre dos límites,* uno que es igual a 1 y el otro que tiende hacia 1, será igual a 1.

— Se ve, en resumen, que la parte principal del arco MM′ es igual a la cuerda MM′, tomando esta última por infinitésimo principal.

— Estas consideraciones sobre los infinitésimos se han terminado y el lector puede ahora abordar el estudio de las diferenciales.

CAPITULO VII

LAS DIFERENCIALES

66. Notas preliminares sobre los grados de pequeñez. — *La pequeñez de una magnitud es relativa.* Un minuto comparado con una hora es muy pequeño, y sin embargo un minuto es muy grande comparado con un segundo:

$\frac{1}{60}$ de hora o un minuto es pequeño,

pero:

$\frac{1}{60}$ de $\frac{1}{60}$, o sea 1 segundo es mucho más pequeño.

Diremos que, comparado con la hora, un minuto es de primer orden de pequeñez, y que un segundo es de segundo orden de pequeñez.

Del mismo modo, $\frac{1}{100}$ es pequeño comparado con la unidad, y $\frac{1}{100}$ de $\frac{1}{100}\left(\text{o sea } \frac{1}{10.000}\right)$ es de segundo orden de pequeñez, mientras que:

$$\frac{1}{100} \quad \text{de} \quad \frac{1}{100} \quad \text{de} \quad \frac{1}{100} \qquad \left(\text{o sea } \frac{1}{10^6}\right)$$

es de tercer orden.

— Se ve que cuanto más pequeña es una cantidad, más despreciable será la cantidad correspondiente de segundo orden de pequeñez, y si se toma una cantidad de primer orden suficientemente pequeña, se podrán siempre despreciar las cantidades de segundo orden.

— Pero, sin embargo, las cantidades muy pequeñas multiplicadas por un número muy grande se hacen muy grandes: si cada uno de los 45 millones de franceses, diera un franco, ¡tendríamos cuarenta y cinco millones de francos!

En el cálculo diferencial, se llama dx a una *pequeña variación* dada a la variable x (variación hacia más o hacia menos), pero **fija**. *La tomamos pequeña, cuanto queramos, pero fija, no la hacemos tender hacia cero como un* Δx.

— Las cantidades, tales como $x\,dx$, x^2dx, $e^x dx$ no son despreciables, pero como $dx \cdot dx$ es de segundo orden, es despreciable frente a x.

Ejemplo: Consideremos la expresión $x + dx$. Calculemos su cuadrado:

$$(x + dx)^2 = x^2 + 2x\,dx + dx^2.$$

El tercer término es completamente despreciable: en efecto, si $dx = \frac{1}{60}$ de x, tendremos:

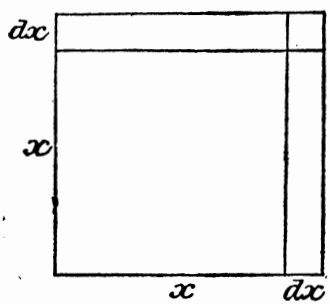

FIG. 14

$$(x + dx)^2 = x^2 + \frac{2x^2}{60} + \frac{x^2}{3.600}.$$

Tomemos ahora $dx = \frac{x}{1.000}$:

$$(x + dx)^2 = x^2 + \frac{2x^2}{1.000} + \frac{x^2}{10^6}.$$

¡El tercer término es un millón de veces menor que el primero y dos mil veces menor que el segundo!

Geométricamente tomemos un cuadrado de lado x. Si x aumenta en dx (fig. 14), la superficie total aumenta en la superficie de dos rectángulos (o sea en $2x \cdot dx$), más la superficie de un pequeño cuadrado ($dx \cdot dx$). Si dx es muy pequeño, este pequeño cuadrado se convierte en un punto, y los dos rectángulos se convierten en dos líneas.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE SOBRE LA DERIVADA. — Sabemos que la derivada de una función $y = f(x)$, en un punto cualquiera, es la *pendiente* de la tangente geométrica a la curva en el punto considerado, es decir (fig. 15):

$$y' = \operatorname{tg} \alpha.$$

Pero, la pendiente es el aumento en altura por cada unidad de distancia horizontal, esto es, el crecimiento de la altura de la tangente a la curva, para un crecimiento de *una unidad* dado a x.

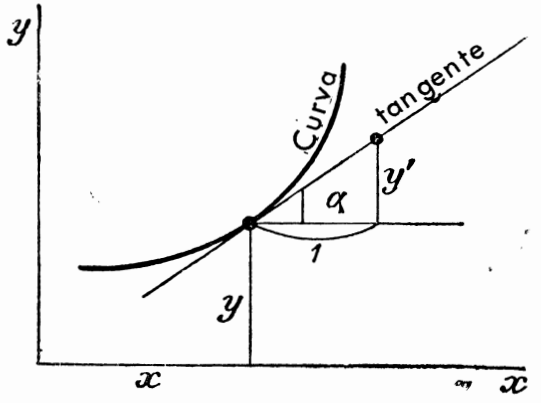

FIG. 15

67. Definición de la diferencial de una función. — Demos a la variable x un incremento **fijo** dx, que se llama *diferencial de la variable* x, entonces corresponde un incremento Δy de la función y una desnivelación dy de la tangente a la curva en el punto considerado (fig. 16) y los dos triángulos rectángulos, que son semejantes, nos dan:

$$\frac{y'}{1} = \frac{dy}{dx}$$

de donde:

$$\boxed{dy = y' \cdot dx}$$

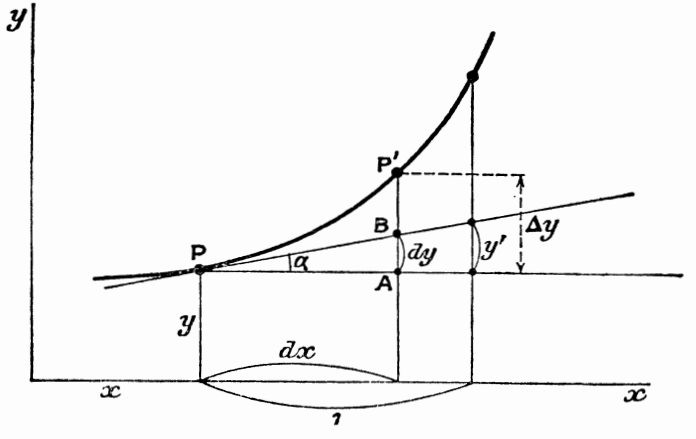

FIG. 16

dy se llama a la diferencial de y, y $\frac{dy}{dx}$ que es el cociente de dos diferenciales es por tanto igual a la derivada y':

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y'}$$

es el cociente de dos cantidades muy pequeñas, pero fijas.

Esta ecuación permite pasar de las derivadas a las diferenciales.

REGLA: *La diferencial dy de una función y es igual al producto de la derivada y' por la diferencial de la variable.*

Así, la diferencial de x es $1 \cdot dx = dx$.

— Aquí estamos llegando al punto crucial de la noción de diferencial. Es necesario considerar la diferencial dy $(= y' \cdot dx)$ como la variación *real* de y, cuando x varía en dx, *y esto con una aproximación de un infinitésimo de segundo orden.*

— Se dice que dy es la *parte principal* del incremento Δy de la función, cuando x varía en Δx (que, por otra parte, puede ser igual a nuestro incremento fijo dx dado a x).

— *En efecto, y he aquí el punto crucial,* sabemos que la derivada es el límite del cociente de dos incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cuando Δx tiende hacia cero:

$$y' = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

por tanto, *antes del límite,* el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no es igual a y'. Si nos colocamos *antes del límite,* podremos escribir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$$

donde ε es *un infinitésimo, desconocido, positivo o negativo, que tiende hacia* 0 *al mismo tiempo que* Δx.

— Pero, como Δx no es todavía nulo, podemos multiplicar los dos miembros por Δx:

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x,$$

y vemos que el infinitésimo Δy es la suma de dos términos: el primero $y' \cdot \Delta x$ que es un infinitésimo de primer orden, y el segundo

$\varepsilon \cdot \Delta x$ que, como es el producto de dos infinitésimos, será de segundo orden (o incluso de orden superior). La parte principal de Δy se llama dy, dando a dx el mismo valor que el incremento inicial Δx dado a x (la notación Δx se reserva para cuando se hable de derivadas).

— Por otra parte, en el triángulo rectángulo PAB de la figura 16, tenemos:

$$AB = PA \cdot \operatorname{tg} \alpha = dx \cdot y'$$

y *la figura muestra que* AP′ (*que es* Δy), *es igual a* AB (*que es* dy), *más el segmento* BP′, *que es por tanto igual a* $\varepsilon \cdot \Delta x$ (y de segundo orden:

$$AP' = AB + BP'.$$

— Si dx es muy pequeño, BP′ será por tanto despreciable respecto a AB, y podremos considerar que dy es el incremento real de la función, aunque es tan sólo la desnivelación de la tangente.

La figura muestra, por otra parte, que el segmento BP′ *dismisuye mucho más rápidamente que* AB.

Ejemplo numérico. Sea $y = x^2$.

Demos a x un incremento Δx, y se convierte en:

$$y_1 = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

La variación de y es, por tanto:

$$\Delta y = y_1 - y = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2,$$

mientras que la diferencial de x^2 es:

$$dy = y' \cdot dx = 2x dx.$$

Sea, por ejemplo, $x = 100$ y $dx = 1$, y se convierte en $101^2 = 10201$, el aumento Δy es por tanto: $\Delta y = 201$, mientras que la diferencial dy es:

$$dy = 2x dx = 2 \cdot 100 \cdot 1 = 200,$$

la diferencia entre Δx y dy es aquí igual a 1.

— Tomemos entonces $dx = 0{,}1$, de donde:

$$y_1 = (100 + 0{,}1)^2 = 10.020{,}01$$

el aumento Δy de y es por tanto 20,01, mientras que dy es igual a:

$$dy = 2 \cdot 100 \cdot 0{,}1 = 20$$

en lugar de 20,01, la diferencia entre Δy y dy es aquí 0,01.

Se ve así que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{20}{0{,}1} = 200$$

y 200 es igual a $2x$, que es la derivada de y.

68. Otro modo de definir la diferencial. — Podemos pasar de la explicación geométrica de la figura 16 a dar una explicación puramente algebraica, por medio de la fórmula de TAYLOR. Sea:

$$y = f(x),$$

si x varía en Δx, el nuevo valor de y será:

$$y_1 = y + \Delta y = f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1} \cdot f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdot f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} \cdot f'''(x) + \ldots$$

de donde sacamos:

$$\Delta y = \Delta x \cdot f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdot f''(x) + \ldots$$

$$= \text{Infinitésimo de primer orden} + \text{Infinitésimo de segundo orden} + \text{Infinitésimo de tercer orden} + \ldots$$

la parte principal de Δy es por tanto, $\Delta x \cdot f'(x)$, que es un infinitésimo de primer orden, que se llama dy, y se podrá escribir, dando al incremento inicial Δx un valor *fijo* dx:

$$\boxed{dy = y' \cdot dx}$$

EJEMPLOS DE APLICACIONES PRACTICAS DE LAS DIFERENCIALES

69. Con objeto de mostrar desde ahora al lector el empleo práctico de las diferenciales en casos concretos, hagamos algunas aplicaciones. Resolveremos primero pequeños problemas por medio de derivadas, a título de ejercicio, y después por medio de las diferenciales, lo cual mostrará la inmensa ventaja práctica de estas últimas.

— Por otra parte, el lector puede tener la impresión que por medio de las diferenciales se hacen cálculos aproximados, ya que se desprecian los infinitésimos de segundo orden. *Vamos a demostrar que esto no tiene importancia y que se pueden hacer cálculos rigurosamente exactos.*

Es precisamente ésta una de las *maravillas* del cálculo integral y diferencial.

1.er Ejemplo: En un resorte (por ejemplo, un resorte helicoidal), la fuerza F que actúa en su extremidad, es proporcional al alargamiento x del resorte:

$$F = K \cdot x$$

o inversamente, el alargamiento es proporcional a la fuerza... mientras no se sobrepase el «límite de elasticidad».

— Se pide el trabajo de la fuerza F, cuando se estira el resorte en una longitud l.

— Tenemos que señalar que este trabajo no es igual a Fl, porque la fuerza F no es constante, ya que varía a lo largo del desplazamiento.

— Vamos a exponer este cálculo de un modo *muy detallado* y por dos métodos diferentes, con objeto de demostrar al lector el mecanismo de empleo del cálculo diferencial.

1.º *Cálculo por derivadas.* — Coloquémonos en un punto cualquiera del desplazamiento, a la distancia x del origen, en este momento la fuerza es $F = Kx$. Demos a x un incremento Δx, *la fuerza aumenta en* ΔF. El trabajo ΔW de la fuerza durante el recorrido Δx es, por tanto, más grande que $F \cdot \Delta x$ y es más pequeño que $(F + \Delta F) \cdot \Delta x$, ya que $F + \Delta F$ es la fuerza *al final* del recorrido. Tendremos por tanto:

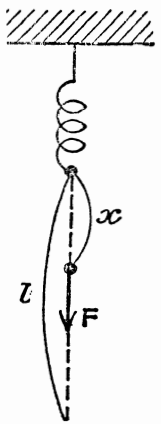

FIG. 17

$$F \cdot \Delta x < \Delta W < (F + \Delta F) \cdot \Delta x$$

o sea:

$$F < \frac{\Delta W}{\Delta x} < F + \Delta F.$$

Si ahora Δx tiende hacia 0, ocurrirá lo mismo con ΔW y con ΔF. Por tanto, en el límite, cuando $\Delta x = 0$ tendremos:

$$\text{límite de } \frac{\Delta W}{\Delta x}_{\downarrow 0} = W'$$

pero $F + \Delta F$ tiende hacia F, y se ve que $\frac{\Delta W}{\Delta x}$, que está constantemente comprendido entre dos límites, uno F que es fijo y el otro $F + \Delta F$ que tiende hacia F, será igual a F en el límite:

$$\text{límite de } \frac{\Delta W}{\Delta x}_{\downarrow 0} = F$$

por tanto:

$$W' = F = Kx.$$

Es decir, que nuestro trabajo queda reducido a encontrar una función W, de la cual conocemos la derivada; esta función es, evidentemente:

$$W = \frac{1}{2} Kx^2.$$

En efecto, la derivada de $\frac{1}{2} Kx^2$ es Kx.

Y para tener el trabajo total, para $x = l$, basta reemplazar x por l:

$$\text{Trabajo total} = \frac{1}{2} Kl^2$$

o también:

$$W = Kl \cdot \frac{l}{2},$$

pero Kl es la fuerza inicial, lo que nos muestra que todo ocurre como si la fuerza final Kl, permaneciera constante y desplazáramos en $\frac{l}{2}$.

2.° *Cálculo por diferenciales.* — Por razones pedagógicas, supongamos que no hemos dicho nada, y comencemos por el principio. Coloquémonos en un punto cualquiera del desplazamiento, a la distancia x del origen, donde la fuerza es F:

$$F = Kx.$$

Demos a x un incremento *fijo* dx (dx es tan pequeño que podemos suponer que F es constante). El trabajo de la fuerza F será dW (*al menos su parte principal*):

$$dW = F \cdot dx$$

de donde:

$$\frac{dW}{dx} = F,$$

es decir, como $\frac{dW}{dx}$ es la derivada de W respecto a x:

$$W' = F = Kx,$$

y, remontando de la derivada a la función, como más arriba:

$$W = \frac{1}{2} Kx^2$$

y el trabajo total, haciendo: $x = l$:

$$W = \frac{1}{2} K l^2$$

Pedimos al lector que comience de nuevo estos dos cálculos, con objeto de ver bien la ventaja del cálculo por diferenciales y que se impregne bien de la marcha seguida, *que será siempre la misma.*

2.° **Ejemplo:** *Calculemos la superficie de un triángulo isósceles* (fig. 18). Sea b la base y h la altura.

1.° *Cálculo por derivadas.*

Coloquemos a la distancia x del vértice superior, donde la anchura es z, y sea S la superficie del triángulo AB'C' de altura x.

— Demos a x un incremento Δx, la anchura aumenta en Δz, y la superficie S aumenta en ΔS (ΔS es la superficie del trapecio de altura Δx).

— Vemos, según la figura 19, que ΔS es mayor que la superficie del pequeño rectángulo $z \cdot \Delta x$ y que ΔS es menor que la superficie del rectángulo grande $(z + \Delta z)\Delta x$, lo que da la doble desigualdad:

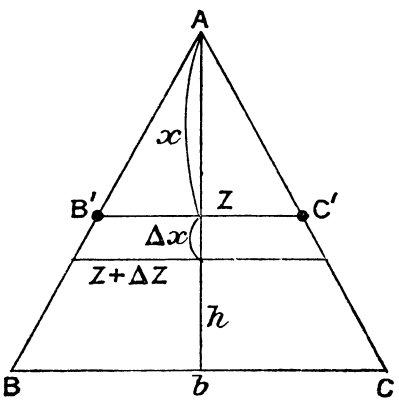

FIG. 18

$$z \cdot \Delta x < \Delta S < (z + \Delta z) \cdot \Delta x$$

o sea:

$$z < \frac{\Delta S}{\Delta x} < z + \Delta z.$$

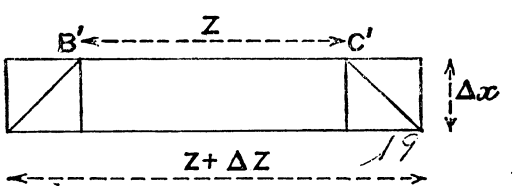

FIG. 19

Si ahora Δx tiende hacia 0, ocurre lo mismo con Δz y con ΔS, y $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ que es mayor que z (que es fija) y menor que $z + \Delta z$, que tiende hacia z, será igual a z en el límite:

$$\text{límite de } \frac{\Delta S}{\Delta x} = z.$$

es decir:

$$S'_x = z.$$

Es necesario ahora encontrar una función S, de la cual conocemos la derivada z (respecto a x); es necesario, por tanto, expresar z en función de x. Como los dos triángulos ABC y AB'C' son semejantes, la razón de las bases es igual a la razón de las alturas:

$$\frac{x}{h} = \frac{z}{b}$$

de donde:

$$z = \frac{b}{h} \cdot x = S'.$$

Deducimos, remontando de la derivada a la función, que:

$$S = \frac{1}{2}\frac{b}{h} \cdot x^2,$$

en efecto, tomando la derivada en esta expresión encontramos $\frac{bx}{h}$.

Y, para tener S total, hagamos $x = h$:

$$S = \frac{1}{2}\frac{b}{h} \cdot h^2 = \frac{1}{2}bh.$$

Encontramos nuevamente la fórmula conocida.

2.° *Cálculo por diferenciales.*

Coloquémonos a la distancia x del vértice superior; en este momento la anchura es z y la superficie es S.

Demos a x un pequeño incremento *fijo* dx (*dx es tan pequeño que podemos suponer que z es constante*), la superficie ha variado en dS, que es igual a la del pequeño rectángulo (*al menos es su parte principal*):

$$dS = z dx$$

de donde:

$$\frac{dS}{dx} = S'_x = z,$$

el resto del cálculo se hace como más arriba, ya que para encontrar una función S cuya derivada con respecto a x es z, basta, naturalmente, expresar z en función de x.

De donde, finalmente:

$$S = \frac{1}{2} bh.$$

Tenemos ahora entre manos dos cosas esenciales: primeramente, el cálculo por diferenciales es mucho más corto (dos líneas), ya que evita el pasar por los límites y escribir desigualdades; después, *se ve que encontramos un resultado rigurosamente exacto, aunque se tenga la impresión de haber hecho un cálculo aproximado, al calcular* dS *en lugar de* ΔS, y al decir que S ha aumentado en la superficie del rectángulo zdx, mientras que es un trapecio (!). Tenemos la impresión de que hemos despreciado los dos pequeños triángulos que aparecen en las extremidades del trapecio, pero éstos son infinitésimos de segundo orden ($\Delta z \cdot \Delta x$).

—La razón es que dx es extremadamente pequeño, y podemos decir que un triángulo puede formarse apilando un número infinito... de hojas de papel de fumar, de anchuras variables.

3.er Ejemplo: *Calcular la energía suministrada por un condensador eléctrico que se descarga.*

Sea C su capacidad, Q la carga eléctrica que contiene y V la diferencia de potencial en bornas.

Sabemos que: $Q = CV$.

Debemos señalar que la descarga no es instantánea. Dura tanto más cuanto mayor sea la carga Q. En efecto, en cuanto salga tan sólo un poco de electricidad del condensador, la diferencia de potencial en bornas disminuye; por tanto, los culombios saldrán cada vez más despacio. La descarga es análoga a un depósito de agua que se vacía por la parte inferior: a medida que el agua sale, el nivel de agua baja, y el agua sale on menos velocidad.

1.° *Cálculo por derivadas.*

Consideremos un instante cualquiera de la descarga, al cabo de un tiempo t, después del cierre del interruptor. Sea q la carga que queda en este momento en el condensador, y sea v la diferencia de potencial en bornas. Tenemos:

$$v = \frac{q}{C}.$$

Consideremos ahora, el instante $t + \Delta t$; durante el tiempo Δt sale de C una carga Δq y la diferencia de potencial disminuye en Δv.

Calculemos la energía ΔW suministrada durante el tiempo Δt.

Sabemos que, cuando Q culombios «caen» todos en bloque de V voltios, la energía suministrada es:

$$W = QV$$

Pero aquí la diferencia de potencial varía desde v *hasta* $(v - \Delta v)$.

Durante el tiempo Δt, la energía suministrada es, por tanto, *menor que* $\Delta q \cdot v$ (puesto que v disminuye durante el tiempo Δt) y esta energía ΔW es *mayor* que $\Delta q(v - \Delta v)$, puesto que $v - \Delta v$ es la diferencia de potencial en el final. Podemos, por tanto, escribir:

$$\Delta q \cdot v > \Delta W > \Delta q(v - \Delta v)$$

de donde:

$$v > \frac{\Delta W}{\Delta q} > v - \Delta v.$$

Si ahora Δt tiende hacia 0, ocurre lo mismo con Δq, con ΔW y con Δv y la cantidad $\frac{\Delta W}{\Delta q}$, que está constantemente comprendida entre dos límites, de los cuales uno v es fijo y el otro $v - \Delta v$ que tiende hacia v, tenderá hacia v:

$$\text{límite}_{\Delta q \downarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta q} = v,$$

es decir:

$$W'_q = v = \frac{q}{C}.$$

Es por tanto necesario encontrar una función W de la que se conoce la derivada $\frac{q}{C}$, y que será, evidentemente, $\frac{q^2}{2C}$:

$$W = \frac{q^2}{2C},$$

y sustituyendo q por Q, tendremos la energía total:

$$W_t = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2V^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2.$$

Que es la fórmula conocida.

2.° *Cálculo por diferenciales.* — Coloquémonos en un instante t de la descarga. En este momento, la carga que queda en C es q y la diferencia de potencial en bornas es: $v = \frac{q}{C}$

— Durante un tiempo dt, sale del condensador una carga dq (dt es tan pequeño que v puede suponerse constante), y la energía suministrada por esta carga dq que «cae» de v voltios es:

$$dW = v \cdot dq$$

de donde:

$$\frac{dW}{dq} = v = \frac{q}{C},$$

es decir:

$$W'_q = \frac{q}{C},$$

por tanto, como anteriormente, remontando de la derivada a la función, se deduce la energía W:

$$W = \frac{q^2}{2C}$$

y la energía total de la descarga se obtiene sustituyendo q por Q:

$$W_t = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2V^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2.$$

Se ve así la rapidez del cálculo por diferenciales.

4.° Ejemplo: *Cálculo de la intensidad eficaz de una corriente alterna.*

Sea $i = I \operatorname{sen} \omega t$ la ecuación de la corriente. Calculemos la cantidad de calor durante un período.

— Sabemos que se llama «intensidad eficaz» de una corriente alterna, a la intensidad de una corriente continua que, durante el mismo tiempo y en la misma resistencia, desarrollaría la misma cantidad de calor (o de energía) (fig. 20).

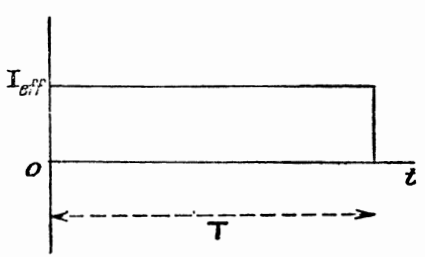

FIG. 20

1.° *Cálculo por derivadas.*

Coloquémonos en el instante t; en este instante la corriente es: $i = I \operatorname{sen} \omega t$ (fig. 21).

— Consideremos ahora el instante $t + \Delta t$; durante el lapso Δt, la corriente ha aumentado, por ejemplo, en Δi y la cantidad de calor ΔW (expresado en julios) será *mayor* que $Ri^2\Delta t$ (puesto que i ha aumentado) y *menor* que $R(i + \Delta i)^2\Delta t$, puesto que $i + \Delta i$ es la corriente en el instante final $t + \Delta t$. Tendremos así, la doble desigualdad:

$$Ri^2\Delta t < \Delta W < R(i + \Delta i)^2\Delta t$$

de donde:

$$Ri^2 < \frac{\Delta W}{\Delta t} < R(i + \Delta i)^2$$

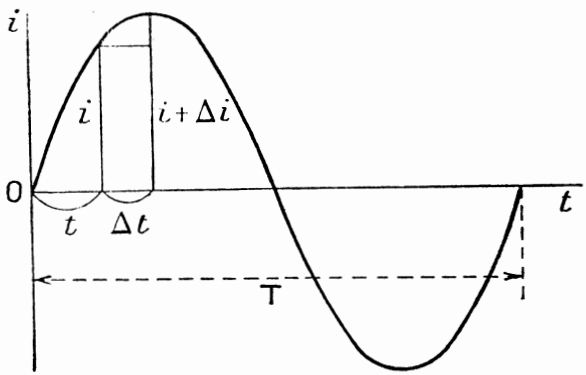

FIG. 21

Si ahora Δt tiende hacia cero, ocurre lo mismo con Δi y con ΔW y la expresión $\frac{\Delta W}{\Delta t}$ que está *constantemente comprendida* entre dos límites, uno Ri^2 que es fijo, y otro $R(i + \Delta i)^2$ que tiende a ser igual al primero, será igual a Ri^2

$$\text{límite de } \frac{\Delta W}{\Delta t} \underset{\downarrow 0}{} = Ri^2,$$

es decir:

$$W'_t = Ri^2 = RI^2 \operatorname{sen}^2 \omega t.$$

Es necesario encontrar una función W cuya derivada es esta función.

Aquí hace falta una pequeña transformación, que es necesaria puesto que el lector no conoce todavía las integrales. Esto nos obliga a emplear un método desviado, para encontrar W fácilmente.

—Se sabe que:

$$\operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}.$$

Tenemos, por tanto:

$$W'_t = \frac{RI^2}{2} - \frac{RI^2}{2} \cos 2\omega t,$$

de donde se deduce, remontando de la derivada a la función:

$$W = \frac{RI^2}{2} t - \frac{RI^2}{2} \operatorname{sen} 2\omega t$$

(en efecto, la derivada de $\operatorname{sen} 2\omega t$ es $2\omega \cos 2\omega t$).

Como el período T es igual a $\frac{2\pi}{\omega}$, tenemos, además:

$$W = \frac{RI^2 t}{2} - \frac{RI^2}{4\omega} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{T} t,$$

por tanto, durante un período T, la energía total es:

$$W_t = \frac{RI^2 T}{2} - \frac{RI^2}{4\omega} \operatorname{sen} \frac{4\pi T}{T} = \frac{RI^2 T}{2} - \frac{RI^2}{4\omega} \operatorname{sen} 4\pi = \frac{RI^2 T}{2} - 0 = \frac{RI^2 T}{2}.$$

Llamemos ahora I eficaz, a la intensidad de la corriente *continua* que durante el mismo tiempo T desprende la misma cantidad de calor; esto expresado en julios será:

$$W = RI^2_{ef}\, T.$$

Igualemos ahora los dos valores de W:

$$\frac{RI^2 T}{2} = RI^2_{ef} \cdot T$$

de donde:

$$\boxed{I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Se encuentra así la conocida fórmula.

2.° *Cálculo por diferenciales.*

Coloquémonos al cabo de un tiempo t. En este momento la corriente es i:

$$i = \mathrm{I} \cdot \operatorname{sen} \omega t.$$

Durante un tiempo dt, la cantidad de calor desprendida (expresada en julios) es dW (dt es tan pequeño que podemos suponer que i es constante):

$$dW = Ri^2 \cdot dt$$

(es la parte principal de ΔW). Deducimos:

$$\frac{dW}{dt} = Ri^2$$

o bien:

$$W'_t = Ri^2 = RI^2 \operatorname{sen}^2 \omega t,$$

el resto del cálculo es el mismo que anteriormente (aunque veremos en el estudio del cálculo integral que estos cálculos *se simplifican mucho*). Tendremos finalmente:

$$I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}.$$

— Esperamos que el lector comience a impregnarse del método del cálculo diferencial, que es el único que deberá emplearse en las aplicaciones prácticas. Sin embargo, daremos todavía una aplicación, análoga a las anteriores.

5.° Ejemplo. — Calcular la masa de un cilindro en el que la densidad (o a masa por unidad de volumen) no es constante, y sigue la ley:

$$\delta = \delta_0 (1 + Kx)$$

donde x es la profundidad, δ_0 la densidad en la superficie, y δ la densidad a una profundidad x. La densidad aumenta, por tanto, linealmente.

— Sea S la sección y H la altura total

1.° *Cálculo por derivadas* (fig. 22).

Coloquémonos a la profundidad x donde la densidad es δ, y demos a x un incremento Δx. Llamemos Δm la masa del cilindro de altura Δx. En este pequeño cilindro, la densidad es δ arriba, y $\delta + \Delta\delta$ abajo, y su masa Δm es mayor que $S \cdot \Delta x \cdot \delta$ (puesto que δ aumenta) y menor que $S \cdot \Delta x(\delta + \Delta\delta)$. Podemos, por tanto, escribir la doble desigualdad:

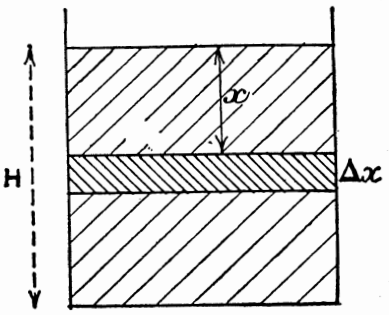

FIG. 22

$$S \cdot \Delta x \cdot \delta < \Delta m < S \cdot \Delta x(\delta + \Delta\delta)$$

de donde:

$$S \cdot \delta < \frac{\Delta m}{\Delta x} < S(\delta + \Delta\delta).$$

Si ahora Δx tiende hacia cero, ocurre lo mismo con $\Delta\delta$ y con Δm, y la cantidad $\frac{\Delta m}{\Delta x}$, que está constantemente comprendida entre dos límites que tienden el uno hacia el otro, será igual a $S \cdot \delta$ en el límite:

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = S \cdot \delta$$

o sea:

$$m'_t = S\delta = S \cdot \delta_0(1 + Kx) = S\delta_0 + S\delta_0 Kx.$$

Es necesario encontrar una función cuya derivada es ésta. Esta función será, evidentemente:

$$m = S\delta_0 \cdot x + \frac{S\delta_0 Kx^2}{2},$$

y para tener la masa total, hagamos $x = H$:

$$m_t = S\delta_0 H + \frac{SKH^2}{2}\delta_0.$$

donde $S\delta_0 H$ es la masa de un cilindro cuya densidad fuera constante e igual a δ_0, la densidad que existe en la superficie superior.

2.° *Cálculo por diferenciales.*

Coloquémosnos a una profundidad x, donde la densidad es:

$$\delta = \delta_0 (1 + Kx).$$

Demos a x un incremento dx (dx es tan pequeño que podemos suponer que δ es constante).

La masa de la rodaja dx (al menos en su parte principal) es igual a:

$$dm = Sdx \cdot \delta$$

de donde:

$$\frac{dm}{dx} = S\delta,$$

es decir:

$$m'_x = S\delta = S\delta_0(1 + Kx),$$

de donde, como anteriormente:

$$m = S\delta_0 x + S\delta_0 \frac{Kx^2}{2},$$

y el peso total:

$$m_t = S\delta_0 H + \frac{S\delta_0 KH^2}{2}.$$

CAPITULO VIII

CALCULO DIFERENCIAL

70. Principio. — Sea una función cualquiera:

$$y = f(x)$$

demos a x un incremento fijo dx, y varía en Δy, y la parte principal de Δy, es decir su diferencial, es como hemos visto anteriormente:

$$\boxed{dy = y' \cdot dx}$$

Así, para tener la diferencial de una función, basta multiplicar su derivada por dx.

La diferencial dy difiere de Δy en un infinitésimo de segundo orden (o de tercer orden), pero como no podemos calcular Δy, podremos calcular fácilmente dy $(= y' \cdot dx)$, y si dx es muy pequeño respecto a x, podremos cambiar Δy por dy. Entrevemos así, aplicaciones prácticas numéricas.

Ejemplos: 1.° *Calcular las diferenciales siguientes:*

$$y = \operatorname{sen} x \qquad dy = \cos x \cdot dx$$

$$y = \sqrt{x} \qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx$$

$$y = e^x \qquad dy = e^x \cdot dx$$

$$y = \operatorname{arc\,sen} x \qquad dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \operatorname{Log} x \qquad dy = \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$y = \operatorname{tg} x \qquad dy = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} x \qquad dy = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

71. Diferencial de una suma, de un producto, de un cociente. — 1.° Sea $y = u + v + w$

donde u, v, w son funciones de x, que es la única variable.

Conocemos la derivada:

$$y' = u' + v' + w'.$$

Multipliquemos todo por dx:

$$y' \cdot dx = u' \cdot dx + v' \cdot dx + w' \cdot dx.$$

Pero, por definición, $u' \cdot dx$ es la diferencial de u, o sea du, del mismo modo $v' \cdot dx$ es la diferencial de v, o sea dv, y $w' \cdot dx$ es dw, se tendrá, por tanto:

$$\boxed{dy = du + dv + dw}$$

2.° Sea $y = u \cdot v$.

Tenemos:

$$y' = vu' + uv'$$

Multipliquemos todo por dx:

$$y'dx = vu'dx + uv'dx$$

es decir:

$$\boxed{dy = vdu + udv}$$

3.° *Sea* $y = \frac{u}{v}$.

Tenemos:

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Multipliquemos todo por dx:

$$y'dx = \frac{v \cdot u'dx - u \cdot v'dx}{v^2}$$

o también:

$$\boxed{dy = \frac{vdu - udv}{v^2}}$$

Ejemplos:

1.° $$y = \cos x \cdot \sqrt{\operatorname{sen} x} = u \cdot v.$$

Tenemos:

$$dy = \sqrt{\operatorname{sen} x}\,(-\operatorname{sen} x)dx + \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \cos x\, dx$$

$$= \left(-\operatorname{sen} x\sqrt{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos^2 x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right) dx.$$

2.°

$$y = \frac{1-3x}{1-2x} = \frac{u}{v}$$

Tenemos:

$$dy = \frac{(1-2x)(-3dx) - (1-3x)(-2dx)}{(1-2x)^2}$$

$$= \frac{(-3+6x+2-6x)dx}{(1-2x)^2} = \frac{-dx}{(1-2x)^2}.$$

En resumen, basta multiplicar por dx la derivada de una función.

72. Diferenciales de las funciones de función. — Sea

$$y = f(u) \qquad \text{donde} \qquad u = \varphi(x).$$

Hemos visto en el primer Tomo, que la derivada de y respecto a x es:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Multipliquemos por dx:

$$y'dx = y'_u \cdot u'_x \cdot dx$$

es decir:

$$\boxed{dy = y'_u \cdot du} \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

— Si tuviéramos $y = f(u)$ y $u = \varphi(v)$ donde $v = g(x)$, tendríamos:

$$\boxed{dy = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x \cdot dx} \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}} \qquad \text{etc.}$$

Ejemplos:

1.° $$y = \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} u \qquad (u = 3x)$$
$$dy = \cos u \cdot du = \cos 3x \cdot 3dx.$$

2.° $$y = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{u} \qquad (u = \operatorname{tg} x)$$
$$dy = -\frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

3.° $$y = \operatorname{Log} \frac{1}{\operatorname{sen} 4x} = \operatorname{Log} u \qquad \left(u = \frac{1}{\operatorname{sen} 4x} = \frac{1}{v}\right)$$
$$dy = \frac{1}{u}\,du = \operatorname{sen} 4x \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 4x} \cdot 4 \cos 4x\right) dx$$
$$= -\frac{4 \cos 4x}{\operatorname{sen} 4x}\,dx = -\frac{4dx}{\operatorname{tg} 4x}.$$

4.° $$y = \operatorname{arc\,tg} e^x = \operatorname{ac\,tg} u$$
$$dy = \frac{1}{1 + u^2}\,du = \frac{1}{1 + e^{2x}} \cdot e^x\,dx.$$

73. Algunas aplicaciones sencillas de las diferenciales. — 1.° Consideremos en electricidad una resistencia R atravesada por una corriente I, y sea V la diferencia de potencial en bornas. Tenemos:

$$I = \frac{V}{R}$$

Supongamos que V varía en dV, ¿cuánto varía I?

— I varía en dI, y tenemos $dI = I' \cdot dV$ (buscamos ΔI y calculamos dI):

$$dI = I' \cdot dV = \frac{1}{R} \cdot dV.$$

Por ejemplo, sea V = 100 voltios, R = 100 ohmios y $dV = 1$ voltio; tendremos:

$$dI = \frac{1}{100} \cdot 1 = 0{,}01 \text{ amperios.}$$

Por tanto, I variará en $\frac{1}{100}$ de amperio (como dI es positivo, I aumentará).

— Supongamos ahora que sea R la variable:

$$I = \frac{V}{R} = f(R),$$

y si R varía en dR, ¿cuánto varía I? I variará en dI y tendremos:

$$dI = I' \cdot dR = -\frac{V}{R^2} dR,$$

si $dR = 1$ ohmio, tendremos:

$$dI = -\frac{100}{100^2} \cdot 1 = -\frac{1}{100} \text{ amperios},$$

el signo — indica que si R aumenta (dR es positivo) I disminuye.

OBSERVACIÓN. — *Hemos calculado* dI *y no* ΔI, *pero como* dV *o bien* dR *son muy pequeños respecto a* V *o bien a* R, *se admite que* dI *representa realmente la variación de corriente (con una aproximación de un infinitésimo de segundo orden).*

2.° Sabemos que la capacidad de un condensador eléctrico es:

$$C = k\frac{S}{e}$$

donde S es la superficie de una de las placas, e la distancia entre las dos placas y $k = \frac{\varepsilon_r}{9 \times 10^9 \times 4\pi}$ en el sistema SI.

Supongamos que e varía en de, ¿cuánto variará C?

— C variará en dC:

$$dC = C' \cdot de$$

$$= kS\left(-\frac{1}{e^2}\right) de = -\frac{kS}{e^2} de.$$

Así, la variación de C está en razón inversa con el cuadrado de e; por tanto, si queremos que para un de dado, la capacidad C varíe mucho, bastará que e sea *lo más pequeño posible*. En esta propiedad se basa el micrófono electrostático, cuya vibración sonora actúa en una de las placas, muy delgada y flexible, haciendo variar el espesor e.

3.° La resistencia eléctrica de un hilo metálico aumenta con la temperatura según la ley:

$$R = R_0(1 + \alpha \cdot t)$$

donde R_0 es la resistencia a cero grados centígrados, t la temperatura, y α un coeficiente que depende del metal ($\alpha = 0{,}0038$ para el cobre). Si t varía en dt, ¿cuánto variará R?

— R variará en dR, y tendremos:

$$dR = R'dt = R_0\alpha dt$$

Es decir, si $R_0 = 100$ ohmios y $dt = 1\,°C$, tendremos:

$$dR = 100 \cdot \frac{38}{10.000} \cdot 1 = 0{,}38 \text{ ohmios.}$$

4.° La potencia eléctrica disipada en una resistencia es $P = RI^2$ (es la ley de JOULE) donde P viene expresada en vatios. Si I varía en dI, ¿cuánto variará la potencia?

La potencia P variará en dP, y tendremos:

$$dP = P' \cdot dI = 2RI \cdot dI$$

esta variación es proporcional a I.

5.° En radio, la longitud de onda de un circuito oscilante viene dada por la fórmula:

$$\lambda = 1.885 \sqrt{L(C + C_0)}$$

donde L es la inductancia (o coeficiente de autoinducción) de la bobina,

C la capacidad del condensador,

C_0 la capacidad propia de la bobina.

—Si C varía en dC, ¿cuánto varía λ?

— λ variará $d\lambda$, y tendremos:

$$d\lambda = \lambda_c' \cdot dC = 1.885 \frac{1}{2\sqrt{L(C + C_0)}} \cdot L dC = \frac{1.885}{2} \sqrt{\frac{L}{C + C_0}} \cdot dC.$$

6.° La superficie de un círculo es πR^2; calcular la variación de la superficie, si R varía en dR.

— La superficie variará en dS, y tenemos:

$$dS = S' \cdot dR = 2\pi R \cdot dR,$$

vemos, por tanto, que la variación dS de la superficie es proporcional a R.

Podemos, pues, resolver el problema siguiente: Supongamos, por ejemplo, un disco de metal que se calienta, y se pide con qué velocidad crece la superficie S del disco cuando el radio crece a la velocidad de 1 mm por segundo, en el momento en que R = 10 cm.

Expresaremos todo en cm y cm^2.

Si el radio R varía en dR durante un tiempo dt, su velocidad de variación es $\frac{dR}{dt} = 0{,}1$; del mismo modo, si durante el mismo tiempo dt, la superficie S varía en dS, la velocidad de variación de la superficie es $\frac{dS}{dt}$. Pero, como hemos calculado dS:

$$dS = 2\pi R \cdot dR,$$

dividamos los dos miembros por dt:

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi R \cdot \frac{dR}{dt} = 2\pi \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 2\pi.$$

Es decir, en este momento (cuando R = 10 cm), la superficie crece a la velocidad de 6,28 cm^2 por segundo.

7.° *Cálculo de una fuerza electromotriz inducida.* — En electricidad, se demuestra que, si en una bobina, el flujo magnético varía en $\Delta\Phi$, durante un tiempo Δt, se produce una fuerza electromotriz, cuyo valor medio es:

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Φ en webers
e en voltios

lo cual no presenta ningún interés, puesto que lo que deseamos conocer es la f.e.m. *instantánea*, en cada instante. Para esto, basta hacer tender Δt hacia cero, en cuyo caso $\Delta\Phi$ tiende también hacia cero, lo que da:

$$e = \text{límite de} -\frac{\Phi\Delta}{\Delta t}\Big]_{\downarrow 0},$$

es decir, la derivada cambiada de signo, del flujo respecto al tiempo:

$$e = -\Phi_t'.$$

Pero sabiendo que una derivada y_x' es el cociente de dos diferenciales $\frac{dy}{dx}$, podemos por tanto escribir:

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Si, por ejemplo, el flujo está producido por una bobina cuya inductancia es L (en henrios), sabemos que el flujo total engendrado es, (en webers):

$$\Phi = Li \qquad \begin{pmatrix} i \text{ en amperios} \\ L \text{ en henrios} \end{pmatrix}$$

por tanto, si L es constante:

$$\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

y

$$\boxed{e = -L\frac{di}{dt}} \qquad (e \text{ en voltios})$$

fórmula clásica empleada corrientemente en electricidad.

8.° *Velocidad y aceleración de un móvil.* — Sea un móvil animado con un movimiento cualquiera.

— Durante un tiempo Δt, recorre una distancia Δx y la velocidad media será $\frac{\Delta x}{\Delta t}$; pero ésta no tiene mucho interés, ya que lo útil es conocer la velocidad en *cada instante*. Por tanto, es necesario hacer tender Δt hacia cero, en cuyo caso Δx tiende también hacia cero, y tendremos en el límite, cuando Δt se hace nulo:

$$v = \text{límite de } \frac{\Delta x}{\Delta t} \underset{\downarrow 0}{} = x_t'.$$

Pero podemos reemplazar la derivada x_t' por el cociente de dos diferenciales $\frac{dx}{dt}$, lo que nos da la velocidad instantánea:

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}}$$

Podemos calcular por el mismo razonamiento (v varía en Δv durante un tiempo Δt), la aceleración a, pero podemos emplear más rápidamente el lenguaje diferencial diciendo: durante un tiempo dt, la velocidad varía en dv y tendremos, por definición de aceleración:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

de donde:

$$dv = a\,dt.$$

Si se conoce a, se deduce la variación de velocidad (al menos su parte principal).

Ejemplos: 1.° En la caída libre de los cuerpos, el espacio recorrido en función del tiempo es:

$$x = \frac{1}{2} g t^2$$

Deducimos la velocidad en cada instante:

$$v = \frac{dx}{dt} = x_t' = gt.$$

Igualmente, en un cuerpo que gira, si durante un tiempo dt, el ángulo de rotación es $d\theta$, la velocidad angular en este momento es, por definición:

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

es decir, la derivada del ángulo, respecto al tiempo.

2.° Sea un proyectil lanzado con una velocidad inicial V_0, bajo un ángulo α con la horizontal. Sabemos que despreciando la resistencia del aire, este proyectil describe una parábola en el espacio, y se demuestra en Mecánica que la ecuación de esta parábola es, mediante forma paramétrica:

$$x = V_0 t \cos \alpha \qquad y = V_0 t \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

— Se pide calcular las componentes instantáneas de la velocidad según el eje x y según el eje y, y deducir la velocidad instantánea a lo largo de la trayectoria.

— Las componentes instantáneas de la velocidad son:

según el eje de las x $\qquad v_x = \dfrac{dx}{dt} = V_0 \cos \alpha$

según el eje de las y $\qquad v_y = \dfrac{dy}{dt} = V_0 \operatorname{sen} \alpha - gt.$

y la velocidad instantánea a lo largo de la trayectoria será:

$$v \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{V_0^2 - 2gtV_0 \operatorname{sen} \alpha + g^2 t^2},$$

y observamos que para $t = 0$, encontramos $v = V_0$

74. Diferencial de una función implícita f (x , y) = 0. — Del mismo modo que para las derivadas, basta diferenciar término a término, pero aquí es mucho más sencillo, puesto que la diferencial de x es dx y la de y es dy. Bastará después despejar dy.

Los ejemplos facilitarán la comprensión.

El lector no olvidará que x es la variable e y es la función.

Ejemplos:

1.° $$x^2y - \frac{\operatorname{sen} x}{y} = 0.$$

El primer término es un producto de la forma $u \cdot v$ y el segundo un cociente de la forma $\frac{u}{v}$.

— Tendremos, por tanto:

$$(y \cdot 2xdx + x^2 \cdot dy) - \left(\frac{y \cdot \cos x dx - \operatorname{sen} x \cdot dy}{y^2}\right) = 0$$

de donde:

$$dy\left(x^2 + \frac{\operatorname{sen} x}{y^2}\right) = \left(\frac{\cos x}{y} - 2xy\right) dx$$

y

$$dy = \frac{\dfrac{\cos x}{y} - 2xy}{x^2 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{y^2}} dx = \frac{y \cos x - 2xy^3}{y^2x^2 + \operatorname{sen} x} dx$$

2.° $$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

Diferenciemos (siendo R^2 constante): $2xdx + 2ydy = 0$

de donde sacamos:

$$dy = -\frac{x}{y} dx.$$

OBSERVACIÓN. — Veremos, página 200, otro procedimiento más rápido que permite calcular directamente dy.

75. Diferenciales de las funciones paramétricas. — En una función paramétrica la variable x y la función y se expresan en función de un parámetro, que puede ser un ángulo θ, o el tiempo t, o cual-

quier otra magnitud. Así, una función de este tipo se representa, por ejemplo, por:

$$\left| \begin{array}{l} y = f(\theta) \\ x = \varphi(\theta). \end{array} \right.$$

Se trata de calcular dy.

— Partamos de la derivada y':

$$y_x' = \frac{dy}{dx},$$

dividamos arriba y abajo por $d\theta$ (que no es nulo):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{y_\theta'}{x_\theta'},$$

resultando, la fórmula:

$$\boxed{dy = \frac{y_\theta'}{x_\theta'} \cdot dx}$$

Ejemplos: 1.° *Ecuación del círculo* (fig. 23).

— Tomemos un punto P cualquiera, de abscisa x y de ordenada y. Tenemos:

$$x = R \cos \theta \qquad \text{y} \qquad y = R \operatorname{sen} \theta,$$

lo que constituye la ecuación del círculo bajo forma paramétrica.

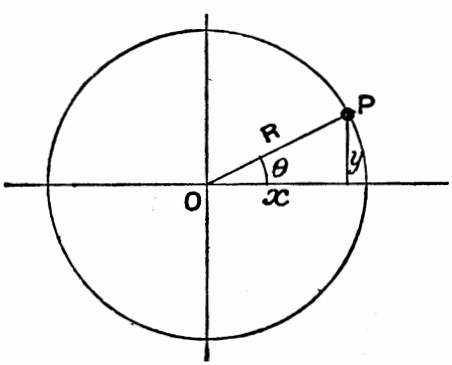

FIG. 23

Deducimos:

$$x_\theta' = -\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{y} \qquad y_\theta' = \mathrm{R}\cos\theta.$$

Se tendrá, por tanto:

$$dy = \frac{\mathrm{R}\cos\theta}{-\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta}\,dx - \frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta}\,dx.$$

Si se puede, se procura expresar dy en función de x. Aquí, esto es posible, ya que:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x},$$

de donde:

$$dy = -\frac{x}{y}\,dx.$$

2.° *Ecuación paramétrica de la cicloide*:

$$y = \mathrm{R}\,(1 - \cos\theta)$$
$$x = \mathrm{R}\,(\theta - \mathrm{sen}\,\theta).$$

La cicloide es la curva engendrada en el espacio por la válvula de una rueda de bicicleta, que gira sin deslizarse sobre un plano horizontal y realizando una vuelta completa.

R es el radio de la rueda y θ es el ángulo que forma el radio de la válvula, en un instante cualquiera, con el radio inicial en el momento en que la válvula está en el punto más bajo de la rueda (y al nivel del suelo).

— Tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_\theta'}{x_\theta'} = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{R}(1 - \cos\theta)}.$$

Pero:

$$\mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{y}{\mathrm{R}}\right)^2} = \sqrt{2\,\frac{y}{\mathrm{R}} - \frac{y^2}{\mathrm{R}^2}}$$

y

$$1 - \cos\theta = \frac{y}{\mathrm{R}}$$

de donde:

$$dy = \frac{\sqrt{2\,\dfrac{y}{\mathrm{R}} - \dfrac{y^2}{\mathrm{R}^2}}}{\dfrac{y}{\mathrm{R}}}\,dx = \sqrt{\frac{2\mathrm{R}}{y} - 1}\,dx.$$

76. Diferencial logarítmica.—Sea una función cualquiera $y=f(x)$. Frecuentemente es más cómodo, para calcular la diferencial dy, el tomar la diferencial logarítmica. El cálculo es más rápido y más sencillo.

Tomamos primeramente el logaritmo neperiano en los dos miembros:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log} f(x),$$

después diferenciamos, lo que nos da $\frac{dy}{y}$ para el miembro izquierdo. Multiplicando después los dos miembros por y, se obtiene dy que se busca.

— Este procedimiento es ventajoso, en particular, cuando la función $f(x)$ contiene, bien una raíz cuadrada, bien una exponencial, ya que al tomar logaritmos, los exponentes se convierten en coeficientes.

Ejemplos:

1.º $$y = e^{\operatorname{sen} x}.$$

Tomemos logaritmos neperianos:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log} (e^{\operatorname{sen} x}) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{Log} e = \operatorname{sen} x. \quad \text{(ya que } \operatorname{Log} e = 1)$$

Diferenciemos:

$$\frac{dy}{y} = \cos x \, dx$$

de donde:

$$dy = y \cdot \cos x \, dx = e^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx.$$

2.º $$y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

de donde:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log} (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \operatorname{Log} (1 + x^2).$$

Diferenciemos:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x \, dx = -\frac{x}{1 + x^2} dx$$

de donde:

$$dy = \frac{-xy}{1 + x^2} dx.$$

Si se puede, se reemplaza y por su valor; lo cual nos da aquí:

$$dy = -\frac{x\,dx}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

3.° Sea $y = uv$ (donde u y v son funciones de x).

Tenemos:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log}(uv) = \operatorname{Log} u + \operatorname{Log} v.$$

Diferenciemos:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

de donde:

$$dy = y\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}\right) = uv\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}\right)$$

$$dy = v \cdot du + u \cdot dv$$

encontramos la fórmula vista más arriba.

4° Sea:

$$y = \frac{u}{v}.$$

Tenemos:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log}\frac{u}{v} = \operatorname{Log} u - \operatorname{Log} v,$$

diferenciemos:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$$

de donde:

$$dy = y\left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right) = \frac{u}{v}\left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right)$$

$$= \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

Encontramos la fórmula conocida.

5.° Sea: $y = u^v$

donde u y v son funciones de x.

Tenemos:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log} (u^v) = v \operatorname{Log} u.$$

— Diferenciemos, observando, que el miembro derecho es un producto:

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{Log} u \cdot dv + v \cdot \frac{du}{u}$$

y

$$dy = y \left(\operatorname{Log} u \cdot dv + v \cdot \frac{du}{u}\right)$$

$$= u^v \left(\operatorname{Log} u \cdot dv + v \cdot \frac{du}{u}\right)$$

$$= u^v \cdot \operatorname{Log} u \cdot dv + v \cdot u^{v-1} \cdot du.$$

Así, por ejemplo:

$$y = x^{\operatorname{sen} x}.$$

Tenemos:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log} (x^{\operatorname{sen} x}) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{Log} x$$

de donde, diferenciando (el miembro derecho es un producto):

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{Log} x \cdot \cos x\, dx + \operatorname{sen} x \cdot \frac{dx}{x}$$

$$dy = y \left(\operatorname{Log} x \cdot \cos x\, dx + \operatorname{sen} x \cdot \frac{dx}{x}\right)$$

$$= x^{\operatorname{sen} x} \left(\operatorname{Log} x \cdot \cos x\, dx + \operatorname{sen} x \cdot \frac{dx}{x}\right)$$

$$= x^{\operatorname{sen} x} \left(\operatorname{Log} x \cdot \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) dx.$$

6.° Sea:

$$y = (\operatorname{tg} x)^x.$$

Tenemos:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log} (\operatorname{tg} x)^x = x \operatorname{Log} \operatorname{tg} x.$$

Diferenciemos:

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{Log} \operatorname{tg} x \cdot dx + x \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

y

$$dy = (\operatorname{tg} x)^x \left[\operatorname{Log} \operatorname{tg} x + \frac{x}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}\right] dx$$

— *Observación.* — Encontraremos en el párrafo 91 la aplicación de las diferenciales a los cálculos de errores en las medidas.

CAPITULO IX

DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

77. Su cálculo. — Del mismo modo que se utilizan derivadas segundas, tercera, etc., podemos calcular las diferenciales sucesivas de una función $y = f(x)$.

Sea dy su diferencial, hemos visto que:

$$dy = y'\,dx$$

donde dx es un infinitésimo **fijo** dado a x, es necesario, por tanto, considerar dx como una constante en todos los cálculos.

— Diferenciemos de nuevo, lo que da la diferencial segunda, que se pronuncia «*d dos y*» y que se escribe *simbólicamente* d^2y, en lugar de escribir $d(dy)$:

$$\begin{aligned} d^2y &= dx \cdot (\text{la diferencial de } y') \\ &= dx \cdot (y'' \cdot dx) \\ &= y'' \cdot dx^2 \end{aligned}$$

donde dx^2 es el producto de dx por dx, es, por tanto, un cuadrado. Deducimos:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = y''}$$

que se enuncia «*d dos y sobre dx dos*».

El numerador es un símbolo, pero el denominador es un cuadrado.

Del mismo modo, partamos de:

$$d^2y = y'' \cdot dx^2$$

y diferenciemos de nuevo. La diferencial tercera se escribe d^3y, y se pronuncia «*d tres y*». *Es un símbolo.*

Y tendremos, diferenciando el producto $y''dx^2$ *(donde* dx^2 *es una constante)*:

$$\begin{aligned} d^3y &= dx^2 \cdot (\text{la diferencial de } y'') \\ &= dx^2 \cdot (y''' \cdot dx) = y''' \cdot dx^3 \end{aligned}$$

de donde:

$$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3} = y'''}$$

que se pronuncia «*d tres y sobre dx tres*».

— Del mismo modo, tendríamos para la diferencial *enésima*:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{\text{enésimo}}.$$

78. Ejemplos:

1.° Sea:

$$y = \operatorname{sen} x.$$

Tenemos:

$$dy = \cos x \cdot dx \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$d^2y = -\operatorname{sen} x \cdot dx^2 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{sen} x$$

$$d^3y = -\cos x \cdot dx^3 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$

$$d^4y = \operatorname{sen} x \cdot dx^4 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{d^4y}{dx^4} = \operatorname{sen} x, \text{ etc.}$$

2.° Sea:

$$y = 5x^4.$$

Tenemos:

$$dy = 20x^3dx \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = 20x^3$$

$$d^2y = 60x^2dx^2 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 60x^2$$

$$d^3y = 120xdx^3 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = 120x$$

$$d^4y = 120dx^4 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{d^4y}{dx^4} = 120$$

$$d^5y = 0.$$

3.° Calcular la diferencial *enésima* de:

$$y = \operatorname{sen} 4x.$$

Tenemos:

$$dy = 4 \cos 4x dx$$
$$d^2y = -16 \operatorname{sen} 4x \cdot dx^2 \qquad \text{etc.}$$

Pero es más cómodo operar como sigue:

$$dy = 4 \cos 4x dx = 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) dx$$

$$= 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) dx.$$

Así, basta añadir $\frac{\pi}{2}$ al ángulo $4x$ (y multiplicar el seno por 4) para tener la diferencial de $y = \operatorname{sen} 4x$. Continuando, gracias a esta observación, se obtiene:

$$d^2y = 16 \operatorname{sen} \left(4x + 3\frac{\pi}{2}\right) dx^2$$

$$d^3y = 64 \operatorname{sen} \left(4x + 2\frac{\pi}{2}\right) dx^3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

donde:

$$d^n y = 4^n \cdot \operatorname{sen} \left(4x + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

Del mismo modo, encontraríamos que la diferencial enésima de $y = \cos ax$ es:

$$d^n y = a^n \cdot \operatorname{sen} \left[ax + (n+1)\frac{\pi}{2}\right] dx^n,$$

o también:

$$= a^n \cdot \cos \left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

4.° Calcular las diferenciales sucesivas de:

$$y = \operatorname{Log} (x + \sqrt{1 + x^2}).$$

— Tenemos:

$$dy = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) dx = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

$$d^2y = -\frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x dx^2 = -x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} dx^2,$$

$$d^3y = \left[(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}(-1) - x\left(-\frac{3}{2}\right)(1 + x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x\right] dx^3$$

$$= -\left[(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2(1 + x^2)^{-\frac{5}{2}}\right] dx^3 \qquad \text{etc.}$$

5.° Calcular las diferenciales sucesivas de:

$$y = e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx.$$

— Tenemos:

$dy = (\operatorname{sen} bx \cdot ae^{ax} + e^{ax} \cdot b \cos bx)\, dx = e^{ax}(a \operatorname{sen} bx + b \cos bx)\, dx$

pero sabemos que, según una equivalencia geométrica, podemos escribir:

$a \cdot \operatorname{sen} bx + b \cos bx = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{sen}(bx + \varphi)$ donde $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$,

de donde:

$$dy = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{ax} \operatorname{sen}(bx + \varphi)\, dx.$$

Es decir, para tener la diferencial dy, basta multiplicar y por $\sqrt{a^2+b^2}$ y sumar φ al ángulo bx.

— Se obtienen entonces fácilmente las diferenciales siguientes:

$$d^2y = (a^2 + b^2)e^{ax} \operatorname{sen}(bx + 2\varphi)\, dx^2$$
$$d^3y = (a^2 + b^2)^{3/2} e^{ax} \operatorname{sen}(bx + 3\varphi)\, dx^3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

y

$$d^ny = (a + b^2)^{n/2} e^{ax} \operatorname{sen}(bx + n\varphi)\, dx^n.$$

Esta fórmula general sería cómoda para desarrollar y en serie de MAC-LAURIN.

6.° En mecánica, hemos visto más arriba que la velocidad v es la derivada del espacio recorrido x, respecto al tiempo t:

$$v = x_t' = \frac{dx}{dt}$$

y, como la aceleración a es la variación de velocidad durante un tiempo dt, es decir, la derivada de la velocidad:

$$a = v_t' = \frac{dv}{dt}$$

se deduce que a es la derivada segunda del espacio recorrido x:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Así, por ejemplo, si el espacio recorrido sigue la ley:

$$x = 3t^2 + 4t - 1,$$

se tendrá la velocidad instantánea:

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t + 4$$

y la aceleración instantánea:

$$a = \frac{dv}{dt} = 6.$$

Inversamente, en el cálculo integral, veremos cómo se puede remontar a x partiendo de a.

79. Diferencial segunda de las funciones paramétricas. — Sea una función paramétrica, donde el parámetro es, *por ejemplo,* el tiempo t:

$$\begin{cases} y = f(t) \\ x = \varphi(t) \end{cases}$$

— Hemos demostrado en el Tomo I que la derivada de y respecto a x es:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{dy}{dx}.$$

Calculemos por tanto $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ de donde se deducirá la diferencial segunda d^2y.

— Tomemos la derivada *respecto a* x del cociente:

$$\frac{y_t'}{x_t'} = \frac{u}{v}$$

observando que: la derivada y' *respecto a* x es $y_t'' \cdot t_x'$ (ya que t es una función de x) y la derivada de x_t' *respecto a* x es, del mismo modo, $x_t'' \cdot t_x'$.

— Se tendrá, por tanto:

$$y_x'' = \frac{x_t'(y_t'' \cdot t_x') - y_t'(x_t'' \cdot t_x')}{x_t'^2} = \left(\frac{x_t' \cdot y_t'' - y_t' \cdot x_t''}{x_t'^2}\right) \cdot t_x',$$

pero sabemos que:

$$t_x' = \frac{1}{x_t'} \qquad \left(\text{ya que} \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}\right)$$

esto nos da:

$$y'' = \frac{d^2y}{d^2x} = \left(\frac{x_t' \cdot y_t'' - y_t' \cdot x_t''}{x_t'^2}\right) \cdot \frac{1}{x_t'}$$

o bien:

$$\boxed{d^2y = \frac{x_t' \cdot y_t'' - y_t' \cdot x_t''}{x_t'^3} \cdot dx^2}$$

Ejemplo: Ecuación del círculo (fig. 23), pág. 175:

$$x = \mathrm{R} \cos \theta$$
$$y = \mathrm{R} \operatorname{sen} \theta.$$

— Tenemos:

$$x' = -\mathrm{R} \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad y' = \mathrm{R} \cos \theta$$
$$x'' = -\mathrm{R} \cos \theta \quad \text{y} \quad y'' = -\mathrm{R} \operatorname{sen} \theta.$$

Se tendrá:

$$y'' = \frac{-\mathrm{R} \operatorname{sen} \theta(-\mathrm{R} \operatorname{sen} \theta) - \mathrm{R} \cos \theta(-\mathrm{R} \cos \theta)}{(-\mathrm{R} \operatorname{sen} \theta)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathrm{R}^2(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)}{-\mathrm{R}^3 \operatorname{sen}^3 \theta} = -\frac{1}{\mathrm{R} \operatorname{sen}^3 \theta}$$

y por fin:

$$d^2y = -\frac{1}{\mathrm{R}\left(\frac{y}{\mathrm{R}}\right)^3} dx^2 = -\frac{\mathrm{R}^2}{y^3} dx^2$$

Si se puede se reemplaza y por su valor en función de x: aquí tendríamos:

$$y = R\sqrt{1-\cos^2\theta} = R\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}} = \sqrt{R^2-x^2}.$$

80. Diferencial segunda de las funciones implícitas. — Basta diferenciar la diferencial primera, recordando que y es una función de x. Pero para evitar errores, es preferible derivar. Un ejemplo permitirá comprender mejor:

Primer ejemplo: Sea la función implícita:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Diferenciemos:

$$\frac{2xdx}{a^2}+\frac{2ydy}{b^2}=0$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y} \quad \text{(donde y es función de } x\text{)}.$$

Derivemos este cociente:

$$y'' \text{ o bien } \frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{a^2y\cdot b^2 - b^2x\cdot a^2y'}{a^4y^2}\right) = -\left(\frac{b^2y - b^2x\cdot\dfrac{dy}{dx}}{a^2y^2}\right)$$

$$= -\frac{b^2y - b^2x\left(-\dfrac{b^2x}{a^2y}\right)}{a^2y^2} = -\frac{a^2b^2y^2+b^4x^2}{a^4y^3},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b^2\frac{(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}$$

de donde se saca d^2y.

Este ejemplo muestra el mecanismo de cálculo, que es el mismo que se ha utilizado en el primer Tomo, para el cálculo de la derivada segunda de una función implícita.

Segundo ejemplo:

$$x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0 = f(x, y).$$

— Diferenciemos término a término:

$$2xdx - (y4dx + 4xdy) + 2ydy = 0$$

o bien:

$$dy(2y - 4x) = dx(4y - 2x) \qquad y = \frac{4y - 2x}{2y - 4x}dx \qquad = \frac{2y - x}{y - 2x}dx$$

Del mismo modo, tomando la diferencial de este cociente:

$$d^2y = \frac{(y - 2x)(2dy - dx) - (2y - x)(dy - 2dx)}{(y - 2x)^2} \cdot dx.$$

Reemplacemos en el numerador dy por su valor:

$$d^2y = \frac{(y - 2x)(2 \cdot \frac{2y - x}{y - 2x}dx - dx) - (2y - x)\left(\frac{2y - x}{y - 2x}dx - 2dx\right)}{(y - 2x)^2} \cdot dx$$

$$= \frac{(y - 2x)[4y - 2x - (y - 2x)] - (2y - x)[2y - x - 2(y - 2x)]}{(y - 2x)^3} \cdot dx^2$$

$$= \frac{(y - 2x) \cdot 3y - (2y - x) \cdot 3x}{(y - 2x)^3} \cdot dx^2 = \frac{3y^2 - 6xy - 6xy + 3x^2}{(y - 2x)^3} \cdot dx^2$$

$$= \frac{3(y^2 - 4xy + x^2)}{(y - 2x)^3}dx^2.$$

Pero, según la función inicial $f(x, y) = 0$, se observa que:

$$y^2 - 4xy + x^2 = 1,$$

nos queda, por tanto:

$$d^2y = \frac{3}{(y - 2x)^3}dx^2.$$

81. Diferencial segunda de una función de función. — Sea:

$$y = f(u) \qquad \text{y} \qquad u = \varphi(x).$$

Tenemos:

$$dy = f'(u)du.$$

— Calculemos la diferencial segunda d^2y, tomando la diferencial del producto $f'(u) \cdot du$. Pero, la diferencial de $f'(u)$ es $f''(u) \cdot du$ y la diferencial de du es d^2u.

— Tendremos, así:

$$d^2y = du \cdot f'(u)du + f'(u) \cdot d^2u = f''(u) \cdot du^2 + f'(u) \cdot d^2u.$$

Del mismo modo obtendríamos la diferencial tercera:

$$d^3y = (du^2 \cdot f'''(u)du + f''(u) \cdot 2du \cdot d^2u) + (d^2u \cdot f''(u)du + f'(u) \cdot d^3u)$$
$$= f'''(u) \cdot du^3 + 3f''(u) \cdot du \cdot d^2u + f'(u) \cdot d^3u.$$

Hagamos un ejemplo sencillo de diferencial segunda.

Ejemplo: Sea:

$$y = \operatorname{sen}^2 x = f(u) = u^2 \quad \text{donde} \quad u = \operatorname{sen} x$$

Tendremos:

$$dy = 2u \cdot du = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx = \operatorname{sen} 2x \cdot dx$$

y, aplicando la fórmula de d^2y:

$$d^2y = 2 \cos^2 x \, dx^2 + 2u(-\operatorname{sen} x \, dx^2) = 2 \cos^2 x \, dx^2 + 2 \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x \, dx^2)$$
$$= 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)dx^2.$$

Y, en efecto, la diferencial de:

$$dy = \operatorname{sen} 2x dx$$

es:

$$d^2y = 2 \cos 2x \cdot dx^2 = 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)dx^2$$

Diferencial segunda de una función compuesta: La calcularemos más adelante, en el párrafo 101, después de las diferenciales de orden superior de las funciones de varias variables.

CAPITULO X

OTRAS DIFERENCIALES

82. Diferencial de un arco de curva. — Se trata de calcular la longitud dl de un arco de curva cualquiera, infinitamente pequeño, en función de las diferenciales dx y dy.

Sea una curva cualquiera $y = f(x)$ (fig. 24) y sea un punto P cualquiera de abscisa x. Demos a x un incremento Δx, y varía en Δy, pero hemos visto más arriba que el cociente:

$$\frac{\text{cuerda PP}'}{\text{arco PP}'} \to 1$$

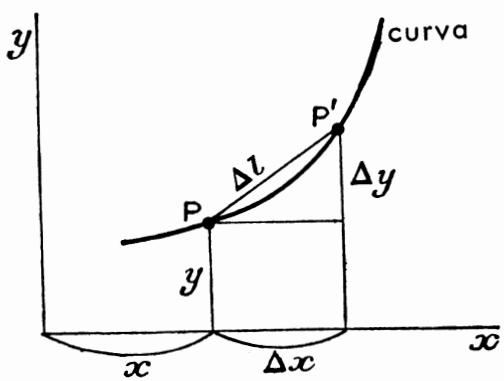

FIG. 24

cuando Δx tiende hacia 0, es decir, cuando P' tiende hacia P.

El triángulo rectángulo nos da:

$$(\text{cuerda PP}')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2,$$

o dividiendo por $(\Delta x)^2$:

$$\left(\frac{\text{cuerda PP}'}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2,$$

y si $P' \to P$, es decir si $\Delta x \to 0$, el cociente de dos infinitésimos $\frac{\text{cuerda } PP'}{\Delta x} = \frac{\Delta l}{\Delta x}$ puede sustituirse por $\frac{\text{arco } PP'}{\Delta x}$ ya que:

$$\text{cuerda } PP' \equiv \text{arco } PP'$$

— Tendremos en el límite, por tanto:

$$\left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = (l_x')^2 = \left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \quad (\Delta x \downarrow 0)$$

es decir:

$$\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + y_x'^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

o bien:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

y

$$\boxed{dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

fórmula que podríamos haber escrito desde el principio, tomando un dx muy pequeño y llamado dl al arco infinitamente pequeño PP'. Esta fórmula diferencial expresa, en suma, el teorema de PITÁGORAS, aplicado al pequeño triángulo de lados dx y dy y de hipotenusa dl.

— Pero, en general, no se conocen separadamente dx y dy, sino $\frac{dy}{dx} = y'$ escribiremos, por tanto:

$$dl = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot dx^2} = \sqrt{(1 + y'^2)dx^2}$$

o sea:

$$\boxed{dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx}$$

fórmula que emplearemos más adelante en el cálculo de los radios de curvatura de las curvas, y en el cálculo integral para calcular la longitud de una curva.

Ejemplo: 1.° Arco de circunferencia. La ecuación de la curva es:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Diferenciemos esta función implícita:

$$2xdx + 2ydy = 0.$$

y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

por tanto:

$$dl = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot dx = \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} \cdot dx = \frac{R}{y}\, dx = \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Este ejemplo basta. Haremos un cálculo análogo para todas las curvas. (Ver Tomo III, *Cálculo Integral,* el cálculo de la longitud de las curvas, llamado también algunas veces *Rectificación de las curvas.*)

83. Caso en que la curva viene dada en coordenadas polares (fig. 25). — *La posición de un punto de la curva viene dada por la* longitud del radio vector ρ que une este punto al polo O, y por el ángulo θ que forma este radio vector con la línea de origen supuesta horizontal:

$$\rho = f(\theta)$$

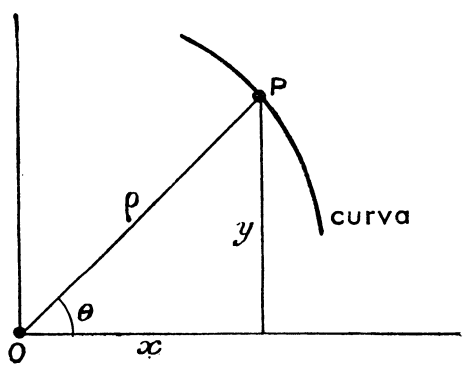

FIG. 25

Tenemos:

$$x = \rho \cdot \cos\theta \quad \text{y} \quad y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

Diferenciemos estos dos productos:

$$dx = \cos\theta \cdot d\rho - \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta \quad \text{y} \quad dy = \operatorname{sen}\theta \cdot d\rho + \rho \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

Se tendrá, por tanto:

$$dl^2 = dx^2+dy^2 = (\cos\theta \cdot d\rho - \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta\, d\rho+\rho \cdot \cos\theta \cdot d\theta)^2$$
$$= d\rho^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)+\rho^2 d\theta^2(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta) = d\rho^2+\rho^2 \cdot d\theta^2$$

o bien:

$$\boxed{dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \cdot d\theta^2}}$$

(Ver Cálculo Integral.)

Ejemplo: Calcular dl para la curva:

$$\rho = a(1 - \cos\theta)$$

que representa la cardiode (y que aparece en radio en la Radiogoniometría).

—Tenemos:

$$d\rho = a \operatorname{sen}\theta d\theta$$

de donde:

$$dl = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot d\theta^2 + a^2(1 - \cos\theta)^2 \cdot d\theta^2}$$
$$= a\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + 1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta} \cdot d\theta = a\sqrt{2 - 2\cos\theta} \cdot d\theta$$
$$= a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\theta} \cdot d\theta = a\sqrt{2}\sqrt{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}} \cdot d\theta = 2a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cdot d\theta.$$

84. Diferenciales de las funciones compuestas. — Sea x la variable, e y la función.

— Se llama función compuesta, una función formada... por varios trozos. Por ejemplo:

$$y = u + v + w \qquad y = u \cdot v$$
$$y = \frac{u}{v} \qquad y = u \cdot v \cdot w$$
$$y = u^v \qquad \text{etc.,}$$

donde u, v y w son funciones de una sola variable x.

— Ya hemos estudiado más arriba diferentes procedimientos para encontrar las derivadas y diferenciales de estas funciones (por ejemplo por medio de la diferencial logarítmica), pero habíamos encontrado tantas fórmulas como funciones.

— Se trata ahora de hallar un procedimiento general, y *una sola fórmula general,* que pueda convenir a todas estas funciones compuestas.

— Consideremos primeramente, una función cualquiera, formada de dos partes u y v, donde u y v son funciones de x:

$$y = f(u, v).$$

— Si x varía en Δx, u varía en Δu, v en Δv e y varía en Δy. El nuevo valor de y es:

$$y_1 = f(u + \Delta u, v + \Delta v),$$

la variación de y es, por tanto:

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

y tendremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x}$$

Sumemos y restemos $f(u, v + \Delta v)$ en el numerador:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta x} + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x}.$$

Multipliquemos y dividamos la primera fracción por Δu y la segunda por Δv:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

— Si ahora Δx tiende hacia 0, ocurrirá lo mismo con Δu, Δv y Δy. En el límite se ve que:

La primera fracción, *donde v no ha variado,* pero donde u ha variado en Δu, es la derivada respecto a u, *permaneciendo v constante*

La segunda fracción, *donde u no ha variado,* pero donde v ha variado en Δv, es la derivada de la función respecto a v, *permaneciendo u constante.*

— Se tendrá, por tanto en el límite, si $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y_x' = f_u' \cdot u_x' + f_v' \cdot v_x'$$

f_u' y f_v' se llaman derivadas parciales.

Tenemos, por tanto:

$$y_x' = \frac{dy}{dx} = f_u' \cdot u' + f_v' \cdot v'$$

de donde:

$$dy = f_u' \cdot u'\, dx + f'_v \cdot v'\, dx$$

y por fin, llamando también df a la diferencial total de la función:

$$\boxed{df \quad \text{o bien} \quad dy = f_u' \cdot du + f_v' \cdot dv}$$

Es decir, dy es la suma de las diferenciales parciales, respecto a u y respecto a v.

Recordando que cuando se calcula f_u' se considera v como una constante, y cuando se calcula f'_v se considera u como una constante.

Si tuviéramos $y = f(u, v, w)$ se encontraría mediante un cálculo análogo:

$$\boxed{\text{df} \quad \text{o bien} \quad dy = f'_u \cdot du + f'_v \cdot dv + f'_w \cdot dw}$$

85. Ejemplos:

1.° $$y = u \cdot v = f(u, v).$$

Tenemos: f'_u (donde $v = c^{te}$) $= v$ $\quad f'_v$ (donde $u = c^{te}$) $= u$,

por tanto:

$$df \quad \text{o} \quad \text{bien} \quad dy = v \cdot du + u \cdot dv.$$

Se encuentra así, directamente, la fórmula conocida.

2.° $$y = \frac{u}{v} = f(u, v).$$

Tenemos: f'_u (donde $v = c^{te}$) $= \dfrac{1}{v}$ $\quad f'_v$ (donde $u = c^{te}$) $= -\dfrac{u}{v^2}$

por tanto:

$$df \quad \text{o bien} \quad dy = \frac{1}{v} \cdot du - \frac{u}{v^2} \cdot dv = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Se encuentra así, y directamente, la fórmula conocida.

3.° $$y = u \cdot v \cdot w = f(u, v, w).$$

Tenemos:

$$f'_u \text{ (donde } v \text{ y } w = c^{tes}) = v \cdot w$$
$$f'_v \text{ (donde } u \text{ y } w = c^{tes}) = u \cdot w$$
$$f'_w \text{ (donde } u \text{ y } v = c^{tes}) = u \cdot v$$

por tanto:

df o bien $dy = f'_u \cdot du + f'_v \cdot dv + f'_w \cdot dw = vwdu + uwdv + uvdw.$

4.° $$y = u^v = f(u, v).$$

Tenemos:

$$f'_u \quad (\text{donde } v = c^{te})$$

es la derivada de x^m, por tanto es $v \cdot u^{v-1}$,

y $$f'_v \quad (\text{donde } u = c^{te})$$

es la derivada de a^x, por tanto es $a^x \operatorname{Log} a$, es decir, aquí $u^v \operatorname{Log} u$.

Tendremos, por tanto:

df o bien $dy = f'_u \cdot du + f'_v \cdot dv = vu^{v-1} \cdot du + u^v \operatorname{Log} u \cdot dv.$

Ejemplos:

1.° $$y = (\operatorname{sen} x)^x = u^v,$$

Se tendrá:

df o bien $dy = x\,(\operatorname{sen} x)^{x-1} \cdot (\cos x\, dx) + (\operatorname{sen} x)^x \cdot \operatorname{Log} \operatorname{sen} x\, dx.$

2.° Del mismo modo, sea:

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = u^v.$$

Se tendrá:

$$df \text{ o bien } dy = \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x - 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{Log} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) dx.$$

86. Aplicación al cálculo directo de la diferencial de una función implícita. — Sea $f(x, y) = 0$ una función implícita.

— Hemos calculado anteriormente, la derivada y la diferencial dy de una función de este tipo, diferenciando término a término, pero se puede calcular directamente dy por un método mucho más rápido, utilizando la fórmula de las funciones compuestas.

— En efecto, puesto que y es una función de x, se puede considerar la función $f(x, y)$ como una función compuesta sencilla, análoga a $f(u, v) = 0$. Pero como la función $f(x, y) = 0$ es nula, es por tanto constante y su diferencial es nula. Tendremos, por tanto:

$$df = 0 = f'_u \cdot du + f'_v \cdot dv,$$

es decir:

$$f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy = 0$$

o bien:

$$f'_y \cdot dy = -f'_x \cdot dx.$$

Deducimos la diferencial dy de la función:

$$\boxed{dy = -\frac{f'_x}{f'_y} \cdot dx}$$

Naturalmente, al calcular f'_x, se supone y constante, y al calcular f'_y, se supone x constante.

Ejemplos:

1.° Sea: $$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Tenemos:

$$f'_x = 2x \qquad f'_y = 2y,$$

de donde:

$$dy = -\frac{2x}{2y}\,dx = -\frac{x}{y}\,dx$$

fórmula ya encontrada.

2.° Sea el ejemplo estudiado anteriormente:

$$f(xy) = x^2y - \frac{\operatorname{sen} x}{y} = 0.$$

Tenemos:

$$f'_x = 2xy - \frac{\cos x}{y}$$

$$f'_y = x^2 + \frac{\operatorname{sen} x}{y^2},$$

de donde:

$$dy = -\frac{f'_x}{f'_y}\,dx = -\frac{2xy - \dfrac{\cos x}{y}}{x^2 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{y^2}}\,dx = -\frac{2xy^3 - y \cdot \cos x}{x^2y^2 + \operatorname{sen} x}\,dx,$$

resultado análogo al encontrado en la página 174.

CAPITULO XI

DIFERENCIALES DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES

87. Diferencial total. — Hasta ahora tan sólo hemos estudiado las funciones de una sola variable x, pero en la práctica tenemos frecuentemente que estudiar funciones de varias variables *independientes*, por ejemplo:

la superficie de un rectángulo: $S = b \cdot h = f(b, h)$,

el volumen de un cilindro: $V = \pi R^2 h = f(R, h)$,

la intensidad de una corriente eléctrica en una resistencia:

$$I = \frac{V}{R} = f(V, R),$$

la capacidad de un condensador: $C = \frac{\varepsilon_r}{9 \times 10^9} \frac{S}{4\pi e} = f(S, e)$,

la cantidad de calor disipado en una resistencia eléctrica:

$$P = RI^2 t = f(R, I, t),$$

la fuerza electromagnética que se ejerce sobre un conductor eléctrico colocado en un campo magnético:

$$F = BI\, l \operatorname{sen} \alpha = f(B, I, l, \alpha),$$

la intensidad de la inducción magnética producida por una bobina:

$$B = 4\pi 10^{-7} \frac{NI}{l} = f(N, I, l),$$

la intensidad de una corriente eléctrica en un circuito cerrado:

$$I = \frac{E}{R + r} = f(E, R, r),$$

la longitud de onda de un circuito oscilante $\lambda = f(L, C)$, etc.

Estas son funciones de varias variables, en las cuales se puede variar una de las variables, sin tocar las demás.

— Si ahora hacemos variar todas las variables *al mismo tiempo,* es útil poder calcular la variación global de la función, es decir su diferencial total.

— Sea, por tanto, para precisar, una función de dos variables *independientes* x y z:

$$y = f(x, z).$$

Si x varía en dx y z varía en dz, calculemos dy, es decir *la diferencial total.* Podremos hacer sobre esta función, el mismo cálculo que hemos hecho anteriormente para una función compuesta:

$$y = f(u, v)$$

bastaría cambiar las letras: el cálculo es rigurosamente análogo. El resultado sería, por tanto, el mismo, y se podrá escribir:

$$\boxed{df = f'_x \cdot dx + f'_z \cdot dz}$$

Cuando se toma la derivada respecto a una letra, se consideran todas las demás letras como constantes.

La diferencial total df, o bien dy, es, por tanto, igual a la suma de las diferenciales parciales

— Hay, por otra parte, un gran número de matemáticos que toman *a priori* esta fórmula como *definición* de la diferencial total; por tanto, no la demuestran.

— Sin embargo, para mentes escrupulosas (!), nosotros demostraremos esta fórmula.

— Pero señalemos de antemano, que para precisar claramente con relación a qué letra se toma la derivada o la diferencial, se utiliza una nueva notación para las derivadas parciales, utilizando la letra griega ∂. Se escribe:

$f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ y se pronuncia «*derivada parcial de f respecto a x*»

y

$f'_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}$ y se pronuncia «*derivada parcial de f respecto a z*».

Hay que señalar que *esta notación es un símbolo, y no un cociente, y que no se debe, en ningún caso, multiplicar por* ∂x *o por* ∂z.

— Tendremos, por tanto, la diferencial total:

$$\boxed{df = = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx$ se pronuncia así:

«*derivada parcial de f respecto a x, diferencial de x*», es el producto de la derivada parcial por dx.

— Del mismo modo, $\frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz$ se pronuncia así:

«*derivada parcial de f respecto a z, diferencial de z*», es el producto de la derivada parcial por dz.

— Pero como la función es $y = f(x, z)$, podemos también escribir, lo que es idéntico (y es una sencilla cuestión de escritura):

$$df \text{ (o bien } dy) = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot dz.$$

— Para tres variables independientes:

$$y = f(x, z, t)$$

se tendría:

$$\boxed{df \text{ (o bien } dy) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dt}$$

— Estas notaciones nos serán muy útiles más adelante, ya que estas fórmulas tienen un gran número de aplicaciones prácticas.

88. Demostración de la fórmula de la diferencial total. — Sea la función de dos variables independientes x y z:

$$y = f(x, z)$$

Demos a x y a z incrementos h y k, a partir de un valor determinado x_0 y z_0.

Tenemos que calcular Δy:

$$\Delta y = f(x_0 + h, z_0 + k) - f(x_0, z_0). \tag{1}$$

— Consideremos la función siguiente, donde t es la única variable:

$$\varphi(t) = f(x_0 + ht, z_0 + kt)$$

para $t = 1$ $\quad \varphi(1) = f(x_0 + h, z_0 + k)$

para $t = 0$ $\quad \varphi(0) = f(x_0, z_0)$,

por tanto, la expresión (1) que representa Δy es:

$$\Delta y = \varphi(1) - \varphi(0).$$

Pero, el teorema de los incrementos finitos aplicado a la función $\varphi(t)$, nos da:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = (1 - 0) \cdot \varphi'(c)$$

donde c es un valor de t comprendido entre 0 y 1.

— Para este valor de t, $x_0 + ht$ toma un cierto valor x_1 intermedio entre x_0 y $x_0 + h$, y $z_0 + kt$ toma un cierto valor z_1 intermedio entre z_0 y $z_0 + k$.

— Calculemos por tanto $\varphi'(t)$, para hacer en ella después $t = c$; pero la función $\varphi(t)$ es una función compuesta:

$$\varphi(t) = f(x + ht, z + kt) = f(u, v)$$

donde t es la variable.

— Y la fórmula de las funciones compuestas nos da:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= f'_u \cdot u'_t + f'_v \cdot v'_t = f'_u \cdot h + f'_v \cdot k \\ &= h \cdot f'_x(x_0 + ht, z_0 + kt) + k \cdot f'_z(x_0 + ht, z_0 + kt)\end{aligned}$$

y

$$\varphi'(c) = h \cdot f'_x(x_1, z_1) + k \cdot f'_z(x_1, z_1).$$

— Se tendrá, por tanto, para Δy:

$$\Delta y = f(x_0 + h, z_0 + k) - f(x_0, z_0) = h \cdot f'_x(x_1, z_1) + k \cdot f'_z(x_1, z_1).$$

Esta fórmula de Δy para una función de dos variables es análoga a la fórmula de los incrementos finitos para una sola variable:

$$f(a + h) - f(a) = h \cdot f'(c) \quad \text{o bien} \quad h \cdot f'(a + \theta \cdot h).$$

Pero, si ahora hacemos tender h y k hacia cero, x_1 y z_1 tienden hacia x_0 y z_0, y los dos valores de las derivadas parciales tienden hacia

$$f'_x(x, z) \quad \text{y} \quad f'_z(x, z),$$

y Δy se escribirá:

$$\Delta y = h[f'_x(x, z) + \alpha] + k[f'_z(x, z) + \beta]$$

donde α y β son infinitésimos, desconocidos, h y k se consideran de primer orden.

— La parte principal de Δy será por tanto:

$$df \text{ o bien } dy = h \cdot f'_x(x, z) + k \cdot f'_z(x, z),$$

o también, haciendo $h = dx$ y $k = dz$:

$$df \text{ o bien } dy = f'_x \cdot dx + f'_z \cdot dz.$$

Es la diferencial total de la función y. c.q.d.

89. Ejemplos de diferenciales. — 1.° *Sea la función de dos variables x y z:*

$$y = 3x^2z - \frac{\operatorname{sen} z}{x} = f(x, z).$$

Tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xz + \frac{\operatorname{sen} z}{x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^3 - \frac{\cos z}{x},$$

por tanto:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz = \left(6xz + \frac{\operatorname{sen} z}{x^2}\right) dx + \left(3x^3 - \frac{\cos z}{x}\right) dz.$$

2.° Sea: $$y = e^{\frac{x}{z}} = f(x, z).$$

Tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^u \cdot u' = e^{\frac{x}{z}} \cdot \frac{1}{z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^u \cdot u' = e^{\frac{x}{z}} \left(-\frac{x}{z^2}\right)$$

por tanto:

$$df = \left(e^{\frac{x}{z}} \cdot \frac{1}{z}\right) dx - \left(e^{\frac{x}{z}} \cdot \frac{x}{z^2}\right) dz = e^{\frac{x}{z}} \left(\frac{dx}{z} - \frac{x dz}{z^2}\right) = e^{\frac{x}{z}} \left(\frac{z dx - x dz}{z^2}\right)$$

3.° *Superficie de un rectángulo:* $S = bh = f(b, h)$.

— Si la base b varía en db y si la altura h varía en dh, ¿cuánto varía la superficie S (fig. 26)?

— La superficie S varía en dS y se tendrá:

$$dS = \frac{\partial f}{\partial b} \cdot db + \frac{\partial f}{\partial h} \cdot dh = h \cdot db + b \cdot dh.$$

Se observa en la figura que $h \cdot db$ es la superficie del rectángulo de la derecha y $b \cdot dh$ la del rectángulo inferior, y dS es la suma de ambos rectángulos. dS es, por tanto, la parte principal de ΔS, y le falta la superficie del pequeño rectángulo $db \cdot dh$ para valer exactamente ΔS, pero es un infinitésimo de segundo orden.

— Si $h = 10$ m $\qquad b = 2$ m
y sean $dh = +10$ cm $\qquad db = +1$ cm.

Tendremos:

$$dS = 10 \cdot \frac{1}{100} + 2 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3 \text{ m}^2$$

No olvidaremos que dS es la parte principal de ΔS; buscamos ΔS, pero se calcula dS.

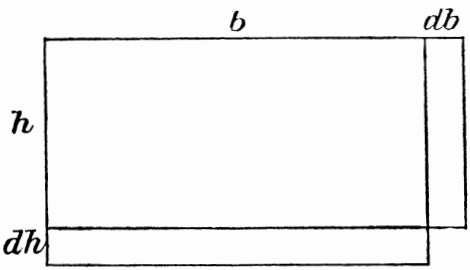

FIG. 26

4.° *Sea una resistencia* R *recorrida por una corriente de intensidad* I, *y sea* V *la diferencia de potencial.* Tenemos:

$$I = \frac{V}{R} = f(V, R)$$

de donde:

$$dI = f'_V \cdot dV + f'_R \cdot dR = \frac{1}{R} dV - \frac{V}{R^2} dR.$$

Sea:

$V = 100$ voltios, $R = 100$ ohmios, $dV = +1$ voltio, $dR = +2$ ohmios.

Se tendrá, para la parte principal de ΔI, es decir la diferencial de I:

$$dI = \frac{1}{100} \cdot 1 - \frac{100}{100^2} \cdot 2 = \frac{1}{100} - \frac{2}{100} = -0{,}01 \text{ amperios.}$$

por tanto I *disminuye* en 0,01 amperios.

5.° *Capacidad de un condensador* $C = \frac{kS}{e} = f(S, e)$. (Ver página 169).

Se tendrá:

$$dC = f'_S \cdot dS + f'_e \cdot de = \frac{k}{e} \cdot dS + kS\left(-\frac{1}{e^2}\right) de = \frac{k}{e}\left(dS - \frac{S}{e} de\right)$$

dC es la parte principal de ΔC.

Si se quiere que C no varíe, es necesario que dC sea nulo, lo que nos da:

$$dS - \frac{S}{e} de = 0$$

o bien:

$$\frac{dS}{S} = \frac{de}{e}$$

es decir, que la variación relativa de e debe ser igual y del mismo signo que la variación relativa de S.

6.° *Campo magnético de una bobina.*

Se sabe que la inducción B del campo magnético producido por una bobina es, en el aire:

$$B = \frac{4\pi 10^{-7} NI}{l} = f(N, I, l).$$

Se tendrá (I en amperios, l en metros, B en teslas).

$$dH = f'_N \cdot dN + f'_I \cdot dI + f'_l \cdot dl = \frac{4\pi I}{10l} \cdot dN + \frac{4\pi N}{10l} \cdot dI - \frac{4\pi NI}{10l^2} \cdot dl$$

$$= \frac{4\pi}{10l}(IdN + NdI - \frac{NI}{l} dl).$$

7.° *Un cilindro tiene 10 m de altura y 5 m de radio. Se aumenta h en 10 cm y R en 1 cm. Calcular la variación de volumen.*

El volumen es:

$$V = \pi R^2 h = f(R, h).$$

Tenemos, por tanto:

$$dV = f'_R \cdot dR + f'_h \cdot dh$$

o bien:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R} \cdot dR + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot dh = 2\pi Rh dR + \pi R^2 dh.$$

Expresemos las dimensiones en metros, tomando:

$$dR = 0{,}01 \qquad dh = 0{,}1$$

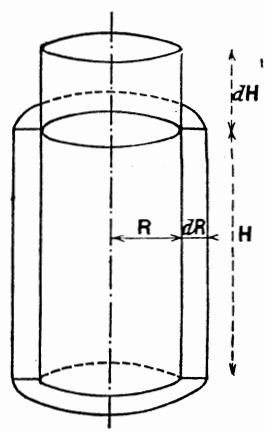

FIG. 27

de donde:

$$dV = \pi R(2h \cdot dR + R \cdot dh) = \pi 5 \left(2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{10}\right) = 11 m^3;$$

hay que señalar que dV es la parte principal de ΔV.

¿Qué le falta a dV para ser ΔV, la variación exacta del volumen?

—Se observa (ver figura 27) que:

$f'_R = 2\pi R h dR$ es el volumen del tubo de altura h y espesor dR,

$f'_h = \pi R^2 dh$ es el volumen del disco de altura dh y de radio R.

—Se ve que, para tener exactamente ΔV, nos falta en dV el volumen del anillo de altura dh y espesor dR, o sea $2\pi R dh dR$, que es un infinitésimo de segundo orden:

$$2\pi R \cdot dh \cdot dR = 2\pi 5 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} = 0{,}031 \ m^3,$$

cantidad completamente despreciable frente a 11 m^3.

8.° *La altura de un cono de humo es de 100 m y decrece a razón de 10 m por segundo. El radio de la base es 50 m y crece a razón de 5 m/s. ¿Cómo varía el volumen y con qué velocidad?*

El volumen de un cono es:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = f(R, h).$$

La variación de volumen es:

$$dV = f'_R \cdot dR + f'_h \cdot dh = \frac{2}{3} \pi R h \cdot dR + \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot dh.$$

Pero tenemos ahora que hacer intervenir las velocidades de variación, expresadas en metros por segundo:

la velocidad de variación de la altura es $\frac{dh}{dt} = -10$ (el signo — indica que h decrece),

la velocidad de variación del radio es $\frac{dR}{dt} = +5$ (el signo + indica que R crece),

la velocidad de variación del volumen es $\frac{dV}{dt}$, en metros cúbicos por segundo.

— Dividamos, por tanto, la fórmula de dV por dt:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\pi Rh \cdot \frac{dR}{dt} + \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{2}{3}\pi 50 \cdot 100 \cdot 5 - \frac{1}{3}\pi 50^2 \cdot 10$$

$$= + 26.180 \text{ metros cúbicos,}$$

y el signo + indica que la diferencial dV es positiva, por tanto, el volumen V aumenta en este momento.

9.° Sea la función:

$$2xz^2 - 3x^3z = f(x, z).$$

Si x crece a razón de 2 cm/s cuando $x = 3$ cm, ¿a qué velocidad debe variar z cuando $z = 1$ cm, para que esta función permanezca constante?

— Tenemos $\frac{dx}{dt} = 2$. Calculemos $\frac{dz}{dt}$ cuando $z = 1$.

Tendremos:

$$df = f'_x \cdot dx + f'_z \cdot dz = 0$$

puesto que la función permanece constante.

O también:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx = -\frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz \qquad (2z^2 - 6xz)\, dx = -(4xz - 3x^2)\, dz.$$

Dividamos por dt:

$$(2z^2 - 6xz)\frac{dx}{dt} = -(4xz - 3x^2)\frac{dz}{dt}$$

de donde:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2z^2 - 6xz}{3x^2 - 4xz} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1} \cdot 2 \approx -2 \text{ cm/s.}$$

El signo — indica que z debe decrecer a la velocidad de 2 cm/s.

90. Aplicaciones radioeléctricas. — 1.° Vamos a mostrar cómo se puede encontrar la ecuación de la lámpara triodo utilizada en radio. Esta es la ecuación que da el valor de corriente de placa i_p, en función de la tensión de rejilla v_g y de la tensión de placa v_p.

— Sabemos que, en un triodo, y a calentamiento constante, la corriente de placa es función de v_g y de v_p, que son dos variables independientes:

$$i_p = f(v_g, v_p). \qquad (1)$$

—Llamemos K al coeficiente de amplificación de la lámpara, ρ a su resistencia interna y S a la pendiente de la lámpara (en miliamperios por voltios). En radio se demuestra, por otra parte, que:

$$S = \frac{K}{\rho}.$$

— Si v_g varía en dv_g y v_p varía en dv_p, i_p variará en:

$$di_p = \frac{\partial f}{\partial v_g} \cdot dv_g + \frac{\partial f}{\partial v_p} \cdot dv_p$$

lo que puede también escribirse:

$$di_p = \frac{\partial i_p}{\partial v_g} dv_g + \frac{\partial i_p}{\partial v_p} dv_p.$$

Pero, se sabe que:

$$\frac{\partial i_p}{\partial v_g} \quad (\text{para } v_p \text{ constante}) = S$$

y

$$\frac{\partial i_p}{\partial v_p} \quad (\text{para } v_g \text{ constante}) = \frac{1}{\rho},$$

de donde:

$$di_p = S \cdot dv_g + \frac{1}{\rho} \cdot dv_p = \frac{K}{\rho} dv_g + \frac{dv_p}{\rho}$$

o por fin:

$$\boxed{\rho\, di_p = K\, dv_g + dv_p} \qquad (2)$$

Esta es la ecuación de la lámpara triodo, *que muestra que la lámpara amplifica* K *veces* (fig. 28), pues para tener el mismo di_p basta actuar sobre la tensión de rejilla K *veces menos* que sobre la tensión de placa.

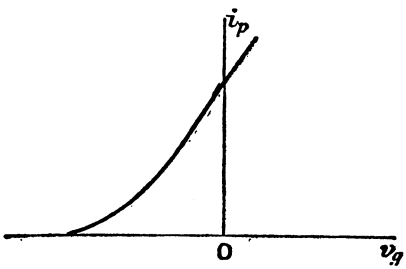

FIG. 28

Este cálculo es muy interesante y... muy curioso, pues partiendo de la ecuación (1) que es completamente vaga, se llega a la ecuación (2) completamente precisa y concreta.

2.° Sea un circuito eléctrico formado por una bobina, cuyo coefi-

ciente de autoinducción (o inductancia) es L y R la resistencia óhmica, en serie con un condensador de capacidad C, siendo alterna la diferencia de potencial y siendo $\omega = 2\pi f$, la pulsación de la fuente, donde f es la frecuencia. Se supone que C y f son las únicas variables.

Coloquémonos en la resonancia, cuando la intensidad de corriente es máxima. Sabemos que: $LC\omega^2 = 1$.

— Si f varía en df, la corriente disminuye en un cierto valor, pero podemos preguntarnos cuál sería la variación dC del condensador que produciría el mismo debilitamiento, permaneciendo f constante.

— Tenemos una función de dos variables:

$$LC\omega^2 = 1 = f(C, \omega).$$

Tomemos su diferencial total, que será nula, ya que esta función es constante, e igual a 1:

$$df = 0 = \frac{\partial f}{\partial C}\, dC + \frac{\partial f}{\partial \omega}\, d\omega$$

o bien:

$$L\omega^2 dC + 2LC\,\omega d\omega = 0 \qquad \omega dC = -2C d\omega$$

o bien:

$$\frac{dC}{C} = -2\frac{d\omega}{\omega} = -2 \cdot \frac{2\pi df}{2\pi f}$$

y por fin:

$$\frac{dC}{C} = -2\frac{df}{f}.$$

de donde se obtiene dC. Se ve que la variación relativa de C es igual a dos veces la variación relativa sobre f, y cambiada de signo.

Esta fórmula se utiliza frecuentemente en Radio.

91. Aplicaciones de las diferenciales al cálculo de errores en las medidas. — Las medidas de todas clases están tomando cada vez más importancia y desarrollo en todas las técnicas, y especialmente en las técnicas eléctricas y electrónicas. Por esto, demostraremos, ayudados con ejemplos, cómo el empleo de los diferenciales permite el cálculo de errores en las medidas.

— Sea x el valor *exacto* de una magnitud a medir, y x_1 el valor *aproximado* que resulta de una medida:

La diferencia $x_1 - x = \pm \Delta x$ es el *error absoluto*. Pero x y Δx son desconocidos y la medida sólo tiene valor cuando se conoce *un límite superior de* Δx; se tendrá así:

$$x_1 - \Delta x < x < x_1 + \Delta x.$$

Tomando x_1 por valor de x, se comete un error, en la práctica, menor que Δx, siendo éste el límite superior del error: *es el error máximo posible* (o incertidumbre) que será siempre mayor que el *error probable*, es decir el que somos susceptibles de cometer.

Es necesario intentar reducir Δx lo más posible, mediante la elección de los aparatos y de los métodos.

— Hay dos clases de errores:

1.° los *errores sistemáticos*, debidos a los métodos de medida y a los aparatos,

2.° los *errores fortuitos*, debidos al operador y al medio en que opera.

— Una buena táctica para medir una magnitud consiste en hacer varias medidas x_1, x_2, x_3, ... (si es posible en condiciones diferentes), y tomar la media aritmética. Si el número de medidas es n, tendremos:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots}{n}$$

que es el valor *más probable* de x, ya que:

1.° los pequeños errores, positivos o negativos, se compensan,

2.° un error notable, no compensado, queda dividido por n.

Naturalmente, no se puede jamás calcular *exactamente* el error que se comete en x. Tan sólo se puede calcular el error máximo que somos susceptibles de cometer, lo que permitirá comparar los métodos de medida: métodos directos o de sustitución o de comparación o bien de oposición. Este error máximo se llama, generalmente, *incertidumbre*.

— La incertidumbre absoluta Δx, no tiene casi interés práctico (todo depende si x es grande o pequeño), lo que cuenta ante todo es la incertidumbre relativa $\frac{\Delta x}{x}$, cuyo valor numérico es, evidentemente, independiente de la elección de las unidades.

92. Reglas de cálculo de errores. — En general, una magnitud x que se mide depende de varios parámetros a, b, c, ... *independientes los unos de los otros*:

$$x = f(a, b, c, \dots)$$

donde a, b, c, etc. no se conocen exactamente, tan sólo conocemos sus valores aproximados a_1, b_1, c_1, etc., de donde el valor aproximado de x es:

$$x_1 = f(a_1, b_1, c_1, \dots),$$

por tanto, el error es:

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_1 - x \text{ (o bien } x - x_1)\\ &= f(a_1, b_1, c_1,\ldots) - f(a, b, c,\ldots)\\ &= f(a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c,\ldots) - f(a, b, c,\ldots).\end{aligned}$$

Pero como los errores absolutos son siempre *muy pequeños,* se puede cambiar Δx por la *diferencial total* dx:

$$dx = f'_a \cdot da + f'_b \cdot db + f'_c \cdot dc + \ldots,$$

y la incertidumbre absoluta será el máximo de esta expresión.

Pero, como los errores son pequeños, podemos escribir:

$$\Delta x = f'_a \cdot \Delta a + f'_b \cdot \Delta b + f'_c \cdot \Delta c + \ldots$$

y en todas estas derivadas reemplazaremos a por a_1, b por b_1, c por c_1, etc.

La incertidumbre relativa será, por tanto:

$$\frac{\Delta x}{x} \simeq \frac{\Delta x}{x_1} = f'_a \cdot \frac{\Delta a}{x_1} + f'_b \cdot \frac{\Delta b}{x_1} + f'_c \cdot \frac{\Delta c}{x_1} + \ldots,$$

y poniendo en evidencia las incertidumbres relativas en a, b, c, se tendrá, finalmente:

$$\frac{\Delta x}{x} \simeq \frac{af'_a}{x_1} \cdot \frac{\Delta a}{a} + \frac{bf'_b}{x_1} \cdot \frac{\Delta b}{b} + \frac{cf}{x_1} \cdot \frac{\Delta c}{c} + \ldots.$$

— **En resumen:**

1.° Las reglas del cálculo diferencial se aplican al cálculo de errores, las diferenciales ordinarias quedan reemplazadas por las incertidumbres absolutas.

Calcularemos así $\frac{\Delta x}{x}$, en función de $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$, etc., pero para tener el *error máximo posible* que somos susceptibles de cometer, haremos la suma aritmética de los errores relativos parciales, *colocando siempre* signos + incluso si hay signos —, con objeto de situarse en el caso *más desfavorable,* en el que todos estos errores se sumarían.

2.° *Prácticamente, se tomará la diferencial* logarítmica total en función de las diferenciales logarítmicas parciales que se reemplazarán por las incertidumbres relativas $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$, $\frac{\Delta c}{c}$, etc.

3.° Si los Δa, Δb, Δc contienen errores de construcción y de medida, se deberán añadir.

Observaciones. — La incertidumbre relativa sobre un producto será la suma aritmética de las incertidumbres relativas a cada factor, y para un cociente $\frac{u}{v}$, tendremos la diferencia de las incertidumbres relativas, pero para colocarnos en el caso más desfavorable, con objeto de tener el error máximo posible, se pondrá el signo $+$.

El lector comprenderá perfectamente, mediante algunos ejemplos sencillos.

93. Ejemplos prácticos de cálculos de error.

Primer ejemplo: Supongamos que hay que medir la superficie de un rectángulo, de lados a y b.

Tenemos:

$$S = a \cdot b,$$

pero, si se mide a y b, cometemos un pequeño error en la lectura de a y b, y lo que leemos en la regla que nos sirve para medir, *no es el valor exacto* de a y de b; sólo conocemos sus valores aproximados.

Por ejemplo, a y b serán conocidos con una aproximación de un semimilímetro. ¿Cuál será, entonces, el error máximo que cometeremos sobre S, ya que, evidentemente, no podemos esperar el conocer exactamente el valor de este error?

— Para hacer comprender bien al lector el mecanismo del cálculo y el modo en que se introducen los diferenciales, apliquemos la teoría precedente a este caso concreto; después, mostraremos cómo se hace el cálculo prácticamente.

Sean S, a y b los verdaderos valores, y S_1, a_1 y b_1 los valores medidos.

Tenemos:

$$S = ab \quad \text{y} \quad S_1 = a_1 b_1,$$

el error absoluto es:

$$\begin{aligned} \Delta S = S_1 - S \ (\text{o bien } S - S_1) &= a_1 b_1 - ab \\ &= (a + da)(b + db) - ab \\ &= a\,db + b\,da + da\,db \\ &\approx a\,db + b\,da. \end{aligned}$$

El valor absoluto del error es igual, como máximo, a la suma de los valores absolutos de cada término (incluso si alguno de ellos es negativo); por tanto, el valor máximo de ΔS, se obtendrá reemplazando da y db por el máximo de sus valores absolutos Δa y Δb:

$$\Delta S = a \cdot |\Delta b| + b \cdot |\Delta a|,$$

y el máximo del error relativo será:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{ab}$$

$$= \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a}$$

$$\approx \frac{\Delta b}{b_1} + \frac{\Delta a}{a_1}.$$

Reconocemos aquí la diferencial logarítmica, asimilando los errores a las diferenciales.

Terminado este cálculo teórico, definitivamente pasemos a su aplicación práctica.

— **Aplicación práctica del cálculo del error.**

— Llamemos da y db a los errores máximos que somos susceptibles de cometer sobre a y sobre b, por ejemplo, supongamos medio milímetro para cada uno de ellos, confundiendo así los errores Δa y Δb con las diferenciales.

— Calculemos el *error máximo posible* dS que se cometerá sobre S.

Hay que observar que $\frac{da}{a}$ y $\frac{db}{b}$ son los errores relativos cometidos sobre a y sobre b, siendo da y db los errores absolutos (es **decir, la diferencia entre el** valor verdadero y el valor medido).

—Partamos de:

$$S = a \cdot b,$$

tomemos logaritmos neperianos: $\text{Log } S = \text{Log } a + \text{Log } b$

diferenciemos: $$\frac{dS}{S} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b},$$

puede ocurrir que $\frac{da}{a}$ o bien $\frac{db}{b}$ sean positivos o negativos (se comete un error por más o por menos) pero como no podemos calcular más que el *error máximo* que somos susceptibles de cometer, nos colocaremos en el *caso más desfavorable, en el que ambos errores tendrían el mismo signo y en el que se sumarían.* Se tomará, por tanto, la suma de los valores relativos:

$$\left|\frac{dS}{S}\right| = \left|\frac{da}{a}\right| + \left|\frac{db}{b}\right|.$$

Además, tomando la diferencial total de S, y dividiendo por S, se encuentra el mismo resultado:

$$\frac{dS}{S} = \frac{b \cdot da + a\, db}{ab} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b}$$

— Es decir, el error relativo *máximo* que podemos cometer en la superficie S es la suma de los errores relativos cometidos sobre cada uno de los dos lados.

Sea $da = db = 0{,}5$ mm donde $a = 2$ m, $b = 4$ m

tendremos para el error relativo máximo sobre S:

$$\frac{dS}{S} = \frac{0{,}5}{2.000} + \frac{0{,}5}{4.000} = \frac{1{,}5}{4.000} \quad \text{(por más o por menos)}$$

de donde:

$$dS = S \cdot \frac{1{,}5}{4.000} = (2 \cdot 4) \cdot \frac{1{,}5}{4.000} = \frac{12}{4.000} \quad \text{o bien } 30 \text{ cm}^3.$$

La superficie S está, por tanto, comprendida entre $(80000 - 30)$ cm^3 y $(80000 + 30)$ cm^3

Segundo ejemplo: En electricidad, en la medida de una resistencia mediante el puente de WHEATSTONE (fig. 29) tenemos, cuando el puente está equilibrado:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

de donde se deduce, si R_1 es la resistencia a medir:

$$R_1 = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_4} = f(R_2, R_3, R_4), \qquad (1)$$

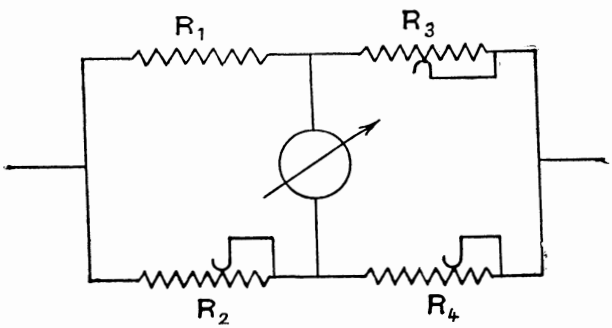

FIG. 29

donde R_3 es una *resistencia* que puede variar ohmio a ohmio. Se conoce, por tanto, con una aproximación de 1 ohmio. Además, las tres resistencias variables R_2, R_3, R_4 están ajustadas, en general, por el constructor con una aproximación de 1/500.

— Tomemos por tanto la diferencial logarítmica, llamando dR_1, dR_2, dR_3 y dR_4 a los errores absolutos cometidos en esta resistencia.

Tenemos:

$$\text{Log } R_1 = \text{Log } R_3 + \text{Log } R_2 - \text{Log } R_4,$$

diferenciemos, lo cual nos hace aparecer los errores relativos:

$$\frac{dR_1}{R_1} = \frac{dR_3}{R_3} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_4}{R_4}.$$

Pero, para colocarnos en las circunstancias *más desfavorables*, en las que estos errores relativos se sumarían (ya que pueden ser positivos o negativos y no conocemos sus signos) tomaremos siempre el signo +:

$$\frac{dR_1}{R_1} = \frac{dR_3}{R_3} + \frac{dR_2}{R_2} + \frac{dR_4}{R_4} \qquad (2)$$

R_2 y R_4 constituyen el *brazo de proporción*.

Podríamos verificar fácilmente que tomando la diferencial total de la ecuación (1) se encuentra la ecuación (2) calculando $\frac{dR_1}{R_1}$.

Cada uno de estos errores relativos es igual a 1/500, pero $\frac{dR_3}{R_3}$ lleva un error suplementario, ya que R_3 se conoce con 1 ohmio de aproximación (si la caja de resistencias varía de ohmio en ohmio), tendremos por tanto:

$$\frac{dR_3}{R_3} = \frac{1}{500} + \frac{1}{R_3}.$$

de donde:

$$\frac{dR_1}{R_1} = \frac{1}{500} + \frac{1}{500} + \frac{1}{500} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{500} + \frac{1}{R_3}.$$

Si, por ejemplo, $R_3 = 1.000$ ohmios, tendríamos:

$$\frac{dR_1}{R_1} = \frac{3}{500} + \frac{1}{1.000} = \frac{7}{1.000}.$$

Es decir, el error relativo máximo *posible* sería de 7/1.000, o sea 0,7 por 100.

Tercer ejemplo: Medida de una resistencia eléctrica por medio de un voltímetro.

Tomemos un generador eléctrico cualquiera (pila seca o acumulador) y midamos su fuerza electromotriz E con un buen voltímetro de resistencia interna *r*, conectando este voltímetro a los bornes del generador (fig. 30).

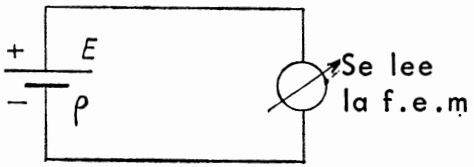

FIG. 30

Coloquemos ahora en serie la resistencia x a medir. La aguja del voltímetro se desviará un poco menos, ya que la resistencia del circuito ha aumentado. Pero, como el cuadrante del aparato está graduado, leeremos V voltios sobre dicho cuadrante; utilicemos por tanto esta lectura.

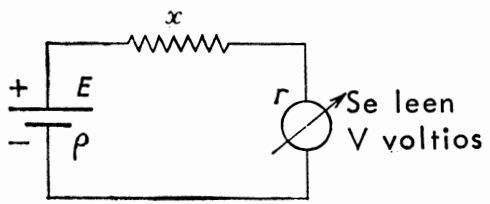

FIG. 31

Si ρ es la resistencia interna de la fuente tenemos, para la intensidad I de corriente:

$$I = \frac{E}{\rho + x + r}$$

pero como r es enorme respecto a ρ (sobre todo si la fuente es un acumulador), se puede despreciar ρ respecto a r, de donde:

$$I = \frac{E}{x + r}.$$

Por otra parte, apliquemos la ley de OHM al voltímetro (ya que un voltímetro es, sencillamente, un miliamperímetro graduado en voltios). Se tendrá:

$$V = rI,$$

en efecto, hay V voltios entre los bornes del voltímetro (por construcción).

Igualemos los dos valores de I:

$$\frac{E}{x+r} = \frac{V}{r}$$

de donde:

$$\frac{E}{V} = \frac{x+r}{r}$$

y

$$\frac{E-V}{V} = \frac{x}{r}$$

por fin:

$$x = r\left(\frac{E-V}{V}\right).$$

Vemos, por tanto, que la medida sólo será exacta si V es muy diferente de E, es decir si x es *muy grande*.

— Busquemos ahora en qué caso tendremos el máximo de precisión, *calculando el mínimo del error*.

La resistencia r del voltímetro se conoce siempre con una gran precisión (es de *constantan*). Tomemos la diferencial de x, donde el paréntesis es un cociente:

$$dx = r\left[\frac{(dE-dV)V - dV(E-V)}{V^2}\right]$$

$$= r\left[\frac{VdE - EdV}{V^2}\right].$$

La incertidumbre relativa será:

$$\frac{dx}{x} = r\left[\frac{VdE - EdV}{V^2}\right] \cdot \frac{V}{r(E-V)}$$

$$= \frac{VdE - EdV}{V(E-V)}$$

Pero como dV es *prácticamente* igual a dE, y poniendo el signo + en el numerador para colocarnos en el caso más desfavorable, el error relativo máximo posible será:

$$\frac{dx}{x} = dE \cdot \frac{V + E}{V(E - V)}.$$

Es necesario, por tanto, hacer mínima la expresión:

$$y = \frac{V + E}{V(E - V)} = \frac{1}{V} + \frac{2}{E - V}.$$

Anulemos, por tanto, la derivada:

$$y' = -\frac{1}{V^2} + \frac{2}{(E - V)^2} = 0$$

de donde:

$$\frac{2}{(E - V)^2} = \frac{1}{V^2}$$

y

$$E - V = \sqrt{2}$$

o por fin:

$$E = V(1 + \sqrt{2})$$

y

$$V = \frac{E}{1 + \sqrt{2}} = \frac{E}{2{,}41}.$$

— ¿Tenemos un mínimo de y?

Calculemos y'':

$$y'' = \frac{2}{V^3} + \frac{4}{(E - V)^3}$$

que es siempre positiva: tenemos, por tanto, un mínimo de y.

En este caso, x se convierte en:

$$x = r\left[\frac{(1 + \sqrt{2})V - V}{V}\right]$$

$$= r\sqrt{2}.$$

En este caso, el error sobre x será mínimo.

Cuarto ejemplo: En electricidad, en la brújula de tangentes, la intensidad de corriente que actúa en una aguja imantada, es proporcional a la tangente del ángulo de desviación α:

$$i = K \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Calcular la relación que existe entre los errores relativos de i y del ángulo α.

— Tenemos:

$$di = \frac{K d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{y} \quad \frac{di}{i} = \frac{\dfrac{K d\alpha}{\cos^2 \alpha}}{K \operatorname{tg} \alpha},$$

$$\frac{di}{i} = \frac{d\alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha} = \left(\frac{d\alpha}{\alpha}\right) \cdot \frac{2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

Es decir, el error relativo $\dfrac{di}{i}$ que se comete con i es igual al error relativo $\dfrac{d\alpha}{\alpha}$ que se comete con α, multiplicado por $\dfrac{2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha}$, por tanto todo depende del ángulo α. Supongamos por ejemplo, que $\alpha = 45°$ o bien $\dfrac{\pi}{4}$, se tendrá:

$$\frac{2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\dfrac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2},$$

de donde:

$$\frac{di}{i} = \frac{d\alpha}{\alpha} \cdot 1{,}57.$$

el error relativo cometido en la intensidad de corriente, es, por tanto, cerca de dos veces mayor que el error relativo que se comete en el ángulo α.

94. Otra aplicación. — *Calcular la aceleración de la gravedad por medio de un péndulo y deducir la incertidumbre relativa* $\dfrac{dg}{g}$.

Se sabe que el período de un péndulo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

donde $g = 9{,}81$ m/seg^2 es la aceleración debida a la gravedad.

Si se mide el período T y la longitud l, se puede deducir g:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \quad \text{de donde} \quad g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = f(l, T);$$

es, por tanto, una función de dos variables.

— Pero, si en la medida de T, cometemos un error $\pm\, dT$, y si en la medida de l cometemos un error $\pm\, dl$, ¿cuál será el error total máximo que somos susceptibles de cometer en g y cuál será el error relativo máximo $\frac{dg}{g}$?

— Calculemos la diferencial total de g:

$$dg = \frac{\partial f}{\partial l} \cdot dl + \frac{\partial f}{\partial T} \cdot dT = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot dl - \frac{8\pi^2 l}{T^2} dT.$$

Con objeto de colocarnos en el caso más desfavorable, en el que los errores se sumarían, pondremos signo + para tener el *máximo posible* en dg:

$$dg = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(dl + \frac{2l}{T} \cdot dT\right)$$

Finalmente, el error relativo *máximo posible* será:

$$\frac{dg}{g} = \frac{\frac{4\pi^2}{T^2}\left(dl + \frac{2l}{T} dT\right)}{\frac{4\pi^2 l}{T^2}} = \frac{dl}{l} + 2\frac{dT}{T}$$

$\frac{dg}{g}$, $\frac{dl}{l}$ y $\frac{dT}{T}$ son las variaciones relativas de g, de l y de T.

— Así, por ejemplo, sea:

$l = 1$ m medido con una aproximación de 1/2 mm, por tanto: $dl = \pm\, 0{,}05$ cm,

T = 2 seg medido con una aproximación de 1/100 seg, por tanto: $dT = \pm \frac{1}{100}$.

— Se tendrá, entonces, para el error relativo *máximo posible,* que cometemos en la medida de g, en las peores condiciones:

$$\frac{dg}{g} = \frac{0{,}05 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} + 2 \cdot \frac{0{,}01}{2} = 0{,}0005 + 0{,}01 = 1{,}05\ \%,$$

o sea prácticamente el 1 %, este error relativo es por más o por menos.

— Se ve también, según la fórmula, que el error relativo cometido sobre l, es completamente despreciable frente al cometido sobre T. Por ello, es necesario medir T con la mayor precisión posible.

— Se ve, por este ejemplo, cómo las diferenciales totales pueden servir al cálculo práctico de los errores.

95. Diferenciales sucesivas de funciones de varias variables. — Sea, por ejemplo, una función de dos variables, independientes x y z:

$$y = f(x, z).$$

— Hemos calculado más arriba la diferencial total dy, que es la suma de las diferenciales parciales:

$$dy = f'_x dx + f'_z dz.$$

— Hemos podido observar que, en el caso más general, cada una de estas derivadas parciales es, asimismo, una función de x y de z:

$$f'_x = \varphi(x, z) \quad \text{y} \quad f'_z = g(x, z)$$

— Así, por ejemplo, sea $y = 3x^3z - \frac{x}{z}$.

Tenemos:

$$\left| \begin{array}{l} f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 9x^2z - \dfrac{1}{z} = \varphi(x, z), \\ f'_z = \dfrac{\partial f}{\partial z} = 3x^3 + \dfrac{x}{z^2} = g(x, z). \end{array} \right.$$

Podemos entonces calcular:

1.° La derivada *respecto* a x de $\frac{\partial f}{\partial x}$, esto es la derivada segunda respecto a x, que se escribe $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ o bien $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, y que se pronuncia «*derivada segunda de f respecto a x, dos veces*».

2.° La derivada respecto a z de $\frac{\partial f}{\partial z}$, esto es la derivada segunda respecto a z, que se escribe $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ o bien $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

— Así, en el ejemplo anterior se tendría:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ = derivada respecto a x, de la derivada respecto a x,

$= 18\ xz.$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ = derivada respecto a z, de la derivada respecto a z,

$= -2xz^{-3} = -\frac{2x}{z^3}.$

Pero, como f'_x es también una función de z podemos derivarla respecto a z, y obtenemos la derivada segunda cruzada, que se escribe:

$$f'_{xz} \text{ o mejor } \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ o también } \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$

que se pronuncia «*derivada respecto a z, de la derivada con respecto a x*», y este es el significado de la expresión anterior.

— Del mismo modo, como f'_z es también una función de x, podemos tomar su derivada respecto a x, que es la otra derivada segunda cruzada, que se escribe:

$$f'_{zx} \text{ o mejor } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \text{ o también } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}.$$

Esta expresión $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$, quiere decir: derivada respecto a x de la derivada respecto a z.

El denominador no es un producto, es un símbolo, así como también el numerador.

— En el ejemplo anterior, tendríamos:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(9x^2 z - \frac{1}{z}\right) = 9x^2 + \frac{1}{z^2},$$

del mismo modo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^3 + \frac{x}{z^2}\right) = 9x^2 + \frac{1}{z^2}.$$

Se observa que son iguales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z},$$

no por casualidad: es completamente general y la demostración forma parte de un teorema que vamos a examinar.

— Hagamos antes algunos ejemplos.

96. Ejemplos de diferenciales sucesivas de funciones de varias variables independientes.

Primer ejemplo:

$$y = e^{xz} = f(x, z).$$

Tenemos:

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xz} \cdot z \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{xz} \cdot x \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z(e^{xz} \cdot z) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = x(e^{xz} \cdot x)$$

$$= z^2 e^{xz} \qquad = x^2 e^{xz}.$$

Tomemos la derivada respecto a z de (1):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(e^{xz} \cdot z) = z(e^{xz} \cdot x) + e^{xz} \cdot 1 = e^{xz}(zx + 1).$$

Tomemos la derivada respecto a x de (2):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xz} \cdot x) = x(e^{xz} \cdot z) + e^{xz} \cdot 1 = e^{xz}(zx + 1),$$

las derivadas segundas cruzadas son iguales.

Segundo ejemplo:

$$y = \text{arc tang}\,\frac{x}{z} = f(x, z).$$

— Tenemos:

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{z^2}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{z}{z^2 + x^2}$$

(2) $$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{z^2}}\left(-\frac{x}{z^2}\right) = \frac{-x}{z^2 + x^2}.$$

Tomemos la derivada respecto a x de (1):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{z^2 + x^2}\right) = z\left[\frac{-1}{(z^2 + x^2)^2} \cdot 2x\right] = \frac{-2xz}{(z^2 + x^2)^2}.$$

Tomemos la derivada respecto a z de (2):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-x}{z^2 + x^2}\right) = -x\left[\frac{-1}{(z^2 + x^2)^2} \cdot 2z\right] = \frac{+2xz}{(z^2 + x^2)^2}.$$

Tomemos ahora la derivada respecto a x de la ecuación (2):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{z^2+x^2}\right) = \frac{(z^2+x^2)(-1)+x\cdot 2x}{(z^2+x^2)^2} = \frac{-z^2+x^2}{(z^2+x^2)^2}.$$

Finalmente, tomemos la derivada respecto a z de (1):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{z^2+x^2}\right) = \frac{(z^2+x^2)\cdot 1 - z\cdot 2z}{(z^2+x^2)^2} = \frac{-z^2+x^2}{(z^2+x^2)^2}$$

Estas dos últimas derivadas cruzadas son iguales.

— Podemos generalizar y demostrar el teorema siguiente:

97. Teorema. — *Sea una función de dos variables independientes:*

$$y = f(x, z),$$

tenemos siempre:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}}$$

Dicho de otro modo: El orden de derivación para la derivada segunda cruzada es indiferente, y tanto si se comienza por x y se continúa con z, como si se comienza por z y se continúa por x, el resultado es el mismo.

Demostración:

Suponiendo z constante, demos a x un incremento Δx, la función se convierte en:

$$y_1 = f(x + \Delta x, z).$$

Para calcular la derivada de la función respecto a x buscaríamos el límite de:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x, z) - f(x, z)}{\Delta x}$$

cuando Δx tiende hacia cero.

Tomemos la derivada con respecto a z, dando a z un incremento Δz. El nuevo valor de la expresión anterior será:

$$\frac{f(x+\Delta x, z+\Delta z) - f(x, z+\Delta z)}{\Delta x}$$

Para tener la derivada respecto a z, hay que restar el valor inicial precedente, después dividir por Δz, y tomar límites, lo cual nos da:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\text{valor final de } f'_x - \text{valor inicial de } f'_x}{\Delta z}$$

$$= \frac{[f(x+\Delta x, z+\Delta z) - f(x, z+\Delta z)] - [f(x+\Delta x, z) - f(x, z)]}{\Delta x \cdot \Delta z}.$$

Hagamos ahora el cálculo en un orden inverso, calculando primero la derivada respecto a z, dando solamente a z un incremento Δz; la función se convierte en $f(x, z+\Delta z)$, y su variación es $f(x, z+\Delta z) - f(x, z)$. Tendremos por tanto que tomar el límite de:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f(x, z+\Delta z) - f(x, z)}{\Delta z},$$

cuando Δz tiende hacia cero.

Tomemos entonces la derivada de esta expresión, respecto a x dando a x un incremento Δx. El nuevo valor de la expresión anterior será:

$$\frac{f(x+\Delta x, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, z)}{\Delta z}.$$

Para tener la derivada respecto a x, hay que restar el valor inicial, y después dividir por Δx y tomar límites:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\text{valor final de } f'_z - \text{valor inicial de } f'_z}{\Delta x}$$

$$= \frac{[f(x+\Delta x, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, z)] - [f(x, z+\Delta z) - f(x, z)]}{\Delta z \cdot \Delta x}.$$

Se observa entonces, que esta expresión es, exactamente, igual a $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$, que acabamos de calcular. El teorema queda, por tanto, demostrado.

— Esta propiedad de la igualdad de las derivadas segundas cruzadas nos servirá más tarde.

— Hemos dado dos ejemplos antes del enunciado del teorema.

98. Observación importante sobre la diferencial total. — Cuando calculamos, más arriba, la diferencial total de una función de dos variables $y = f(x, z)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz$$

pudimos observar que, en el caso más general, la derivada parcial respecto a x era también una función de x y de z:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi(x, z) \text{ que llamaremos M,}$$

y la derivada parcial respecto a z era también una función de x y z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = g(x, z) \text{ que llamaremos N.}$$

La diferencial total se presenta, por tanto, por la forma simplificada:

$$\boxed{df = \mathrm{M} \cdot dx + \mathrm{N} \cdot dz}$$

donde M y N son funciones de x y de z.

99. Diferencial total exacta. — Si una expresión de la forma $\mathrm{M} \cdot dx + \mathrm{N}\, dz$ es la diferencial total de una función de dos variables independientes $y = f(x, z)$, se llama «*diferencial total exacta*».

M representa, por tanto, la derivada de la función y respecto a x:

$$\mathrm{M} = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \left(\text{o bien} \quad \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

N representa la derivada de la función y respecto a z:

$$\mathrm{N} = \frac{\partial f}{\partial z} \qquad \left(\text{o bien} \quad \frac{\partial y}{\partial z}\right)$$

Pero, como hemos demostrado ya que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z},$$

resulta que la condición necesaria y suficiente para que $\mathrm{M} \cdot dx + \mathrm{N}\, dz$ sea una diferencial total *exacta* es que se tenga:

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}}$$

Si esto se cumple, podremos intentar encontrar la función $y = f(x, z)$. Mas éste es otro problema, y como se trata de una integración, estudiaremos varios ejemplos en el Tomo IV (*Cálculo Integral*).

— Verifiquemos, por el momento, la expresión precedente para algunos ejemplos.

Primer ejemplo:

La expresión siguiente es una diferencial total exacta:

$$(z^2 - 3)x\,dx + (1 + x^2)z\,dz.$$

— Es de la forma $M \cdot dx + N \cdot dz$. Verifiquemos por tanto si:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = 2zx \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xz$$

como estas cantidades son iguales, la expresión estudiada es una diferencial total *exacta.*

Segundo ejemplo. — Igual pregunta para:

$$z \operatorname{sen} 2x \cdot dx + \operatorname{sen}^2 x \cdot dz = M dx + N dz.$$

Tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \operatorname{sen} 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x,$$

como estas cantidades son iguales, tenemos una diferencial total *exacta.*

Tercer ejemplo. — Igual pregunta para:

$$\operatorname{sen} 2x \cdot \cos^2 z\,dx + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2z\,dz = M dx + N dz.$$

Tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \operatorname{sen} 2x \cdot 2 \cos z(-\operatorname{sen} z) = \operatorname{sen} 2x \cdot (-\operatorname{sen} 2z)$$

y

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \operatorname{sen} 2z \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2z \cdot \operatorname{sen} 2x.$$

como estas cantidades no son iguales (a causa del signo —), no es una diferencial total *exacta.*

OBERVACIÓN. — Las diferenciales totales intervienen en Termodinámica, en el estudio de los gases y de los motores térmicos, así como en diferentes problemas de mecánica y electricidad.

100. Máximo y mínimo de una función de dos variables independientes. — Sea:

$$y = f(x, z)$$

una función de dos variables independientes x y z. Se trata de saber cuándo esta función pasa por un máximo o por un mínimo.

— En el caso de una función de una sola variable x:

$$y = f(x)$$

sabemos que se debe tener $y' = 0$.

— Para una función de dos variables se utiliza el teorema siguiente.

TEOREMA. — *Para tener un máximo o un mínimo, es necesario que se cumpla a la vez:*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.}$$

Tenemos así dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde deducimos x y z.

— La demostración algebraica sobrepasa el nivel de esta obra; sin embargo, daremos una demostración geométrica intuitiva.

— Demostremos por tanto, que para tener un máximo o un mínimo de la función de dos variables independientes:

$$y = f(x, z)$$

se tienen que anular *a la vez* las dos derivadas parciales.

— Podemos representar geométricamente la función y (fig. 32) suponiendo que x y z son las coordenadas rectangulares de un punto P situado en un plano horizontal, estando *determinado* el valor de y por la altura PM de una línea vertical trazada en el punto P, y cuyo valor en cada punto del plano viene dado por $y = f(x, z)$. El lugar geométrico del punto M cuando x y z varían, representa por

tanto, *una superficie,* que se asemeja a la configuración geográfica de un país cualquiera con sus colinas y valles. En la cumbre de una colina tenemos un máximo de altitud, que está redondeado en todos los sentidos. En el fondo de un valle tenemos un mínimo.

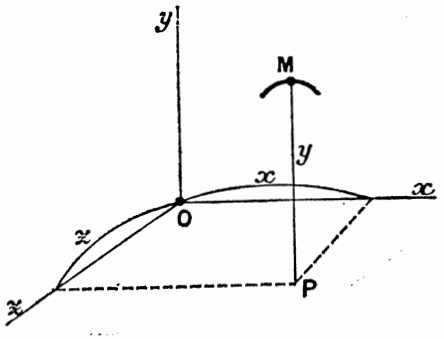

FIG. 32

— Pero, en una *pequeña región alrededor del máximo o del mínimo,* la superficie es *horizontal,* tanto hacia el este o el oeste, en la dirección x, como hacia el norte o sur, en la dirección de las z. Por consiguiente, en este punto la tangente a la superficie, es horizontal en la dirección de las x, es decir $\frac{df}{dx} = 0$, y la tangente a la superficie es horizontal en la dirección de las z, y esto al mismo tiempo, es decir $\frac{df}{dz} = 0$.

— Por tanto, anulando a la vez las dos derivadas, tendremos los valores de x y de z del punto M, que corresponde a un máximo o bien a un mínimo de la altura y.

¿Tenemos un máximo o un mínimo?

Se aplica la regla siguiente:

REGLA: Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ o bien si $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} < 0$, tenemos un *máximo,*

y si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ o bien si $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} > 0$, tenemos un *mínimo.*

— Sea, en efecto, la función $y = f(x, z)$.

Hemos visto que:

$$df \quad \text{o bien} \quad dy = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz. \tag{1}$$

Calculemos por tanto d^2f; como cada una de estas derivadas depende de x y de z, cada una de ellas, será por tanto una función com-

puesta. Así, tendremos para la diferencial de cada término, *la suma* de las diferenciales respecto a x y respecto a z:

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dz$$

y

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dx + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

es decir:

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x} dz$$

y

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\, dz.$$

— Sustituyamos en la ecuación (1) y tendremos d^2f, es decir, la diferencial segunda (sin olvidar que dx y dz son constantes):

$$d^2f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\, dz\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\, dz\right) dz$$

o bien:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\, dx\, dz + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot dz^2. \qquad (2)$$

— Pongamos para simplificar la escritura:

$$d^2f = A dx^2 + 2B dx dz + C dz^2,$$

multipliquemos todo por A:

$$A d^2f = A^2 dx^2 + 2AB dx dz + AC dz^2$$
$$= (A dx + B dz)^2 + (AC - B^2) dz^2.$$

— Podemos discutir ahora fácilmente. Hay tres casos:

Primer caso: $AC - B^2 > 0$. Entonces, $A d^2f$ es la suma de dos cuadrados y será positivo, cualquiera que sean los signos de dx y de dz, y d^2f tendrá el signo de A, ya que está multiplicado por A, por tanto:

Si $A > 0$ (y como $AC - B^2 > 0$, entonces $C > 0$), la derivada segunda $A d^2f$ es positiva y se tendrá un mínimo (del mismo modo que para las funciones de una sola variable).

Si $A < 0$ (y como $AC - B^2 > 0$, entonces $C < 0$), la derivada segunda Ad^2f es positiva, y se tendrá un máximo.

Hemos hecho $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Pero inversamente, dada la simetría de la ecuación (2), podríamos haber puesto $A = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, el cálculo y el razonamiento serían los mismos y la regla queda demostrada.

Segundo caso: $AC - B^2 = 0$ (siendo A, B y $C \neq 0$), la conclusión es la misma, salvo si:

$$Adx + Bdz = 0 \qquad \text{en cuyo caso } d^2f = 0.$$

En este caso hay duda, el máximo o el mínimo exigen entonces que d^3f sea nula y que el signo de d^4f sea determinado.

Tercer caso: $AC - B^2 < 0$. Ad^2f es entonces la diferencia de dos cantidades positivas y el signo de d^2f no está definido, no hay ni máximo ni mínimo.

Ejemplo: Encontrar las dimensiones de un vagón rectángular no cubierto (o de una caja, sin tapa), tales que para un volumen fijo dado V, las superficies laterales y del fondo sean mínimas (fig. 33), con objeto de que se tenga el mínimo coste.

— Sean:

b la longitud de la base,
h la altura,
l la anchura.

El volumen es:

$$V = b \cdot h \cdot l = f(b, h, l)$$

de donde sacamos $h = \frac{V}{bl}$.

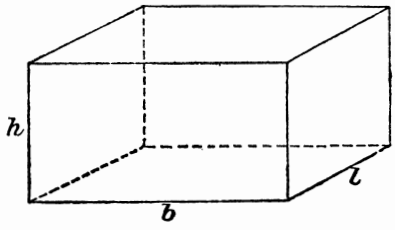

FIG. 33

La superficie total es:

$$S = bl + 2lh + 2bh$$

o bien:

$$= bl + 2l\left(\frac{V}{bl}\right) + 2b\left(\frac{V}{bl}\right)$$

$$S = bl + \frac{2V}{b} + \frac{2V}{l} = f(b, l).$$

Calculemos, por tanto, las dos derivadas primeras, y anulémoslas:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial S}{\partial b} = l - \dfrac{2V}{b^2} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial l} = b - \dfrac{2V}{l^2} = 0, \end{array}\right.$$

es decir, dos ecuaciones con 2 incógnitas, simétricas en b y en l; se deduce:

$$b = l,$$

de donde:

$$S = b^2 + \frac{4V}{b}$$

y

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2b - \frac{4V}{b^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad b = \sqrt[3]{2V} = l.$$

— ¿Tenemos un máximo o un mínimo?

Como:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2 + \frac{8V}{b^2} \text{ que es mayor que 0,}$$

tenemos, por tanto, un mínimo de S.

101. Diferencial segunda de una función compuesta. — Sea la función compuesta:

$$y = f(u, v)$$

donde u y v son funciones de una sola variable x.

— Hemos visto (§ 84) que la diferencial dy es:

$$dy = f'_u \cdot du + f'_v\, dv.$$

— Pero, en el caso más general, la derivada f'_u respecto a u *será* también función de u y de v, y ocurrirá lo mismo con la derivada f'_v respecto a v. Se podrán, por tanto, tomar cuadro derivadas segundas, del mismo modo que para las funciones de dos variables:

la derivada respecto a u de f'_u, o sea f''_{u^2}

la derivada respecto a v de f'_u, o sea f''_{vu}

la derivada respecto a v de f'_v o sea f''_{v^2}

la derivada respecto a u de f'_v o sea f''_{uv}.

— Pero, lo mismo que en las funciones de dos variables, tenemos (basta rehacer la demostración):

$$f''_{vu} = f''_{uv}$$

— Verifiquémoslo, por ejemplo, en el ejemplo siguiente, donde u y v son funciones de la variable x solamente:

$$y = \frac{u^2}{v} + \frac{v}{u^2} = f(u, v).$$

Tenemos sucesivamente:

$$f'_u = \frac{2u}{v} + v(-2u^{-3}) = \frac{2u}{v} - \frac{2v}{u^3}$$

$$f'_v = \frac{-u^2}{v^2} + \frac{1}{u^2}$$

$$f''_{u^2} = f'_u \text{ de } f'_u = \frac{2}{v} - 2v(-3u^{-4}) = \frac{2}{v} + \frac{6v}{u^4}$$

$$f''_{v^2} = f'_v \text{ de } f'_v = -u^2(-2v^{-3}) = \frac{2u^2}{v^3}$$

$$f''_{uv} = f'_u \text{ de } f'_v = -\frac{2u}{v^2} - 2u^{-3}$$

$$f''_{vu} = f'_v \text{ de } f'_u = -\frac{2u}{v^2} - \frac{2}{u^3}$$

Se ve que estas dos últimas derivadas cruzadas son iguales.

— Se trata ahora de calcular la diferencial segunda de la función $y = f(u, v)$.

— Partamos de:

$$df = f'_u \cdot du + f'_v \cdot dv,$$

pero, cada término es un producto; se tendrá, por tanto, *aplicando* a f'_u y a f'_v *la fórmula de las funciones compuestas*, ya que f'_u depende de u y de v, y ya que f'_v depende también de v y de u:

$$d^2f = d(f'_u)du + d(f'_v)dv.$$

Pero:

$$d(f'_u) = f''_{u^2} \cdot du + f''_{uv} \cdot dv.$$

por lo mismo:

$$d(f'_v) = f''_{v^2} \cdot dv + f''_{vu} \cdot du.$$

Tendremos, por tanto:

$$d^2f = (f''_{u^2} \cdot du + f''_{uv} \cdot dv)du + (f''_{v^2} \cdot dv + f''_{vu} \cdot du)dv$$

pero como $f''_{vu} = f''_{uv}$, nos queda:

$$\boxed{d^2f = f''_{u^2} \cdot du^2 + f''_{v^2} \cdot dv^2 + 2f''_{uv} \cdot dudv}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} y &= u \cdot v \\ &= f(u, v) \end{aligned}$$

Calculemos *directamente* df y d^2f:

$$\begin{aligned} df &= v \cdot du + u \cdot dv \\ d^2f &= (du \cdot dv + v \cdot d^2u) + (dv \cdot du + u \cdot d^2v) \\ &= u \cdot d^2v + v \cdot d^2u + 2du \cdot dv. \end{aligned}$$

Calculando d^3f, tendríamos:

$$d^3f = u \cdot d^3v + 3du \cdot d^2v + 3dv \cdot d^2u + v \cdot d^3u.$$

Se observa que estos desarrollos tienen, exactamente, la misma forma y los mismos coeficientes que $(a + b)^2$ y $(a + b)^3$, lo cual permitiría generalizar y calcular d^nf.

102. Función doblemente compuesta. — Sea la función compuesta:

$$y = f(u, v),$$

donde u y v son funciones, no solamente de una variable x, sino de dos variables independientes x y z:

$$u = \varphi(x, z) \qquad \text{y} \qquad v = g(x, z).$$

— Podemos decir que la función y es doblemente compuesta. Desde el momento en que la función y depende de dos variables x y z, podemos aplicar la fórmula de la diferencial total:

$$dy = y'_x \cdot dx + y'_z \cdot dz$$

pero, como la función y es una función compuesta de u y de v, tendremos, según la fórmula de la derivada de una función compuesta:

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x$$

y

$$y'_z = f'_u \cdot u'_z + f'_v \cdot v'_z.$$

La diferencial dy es por tanto, igual a:

$$dy \quad \text{o bien} \quad df = (f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x)dx + (f'_u \cdot u'_z + f'_v \cdot v'_z)dz$$

$$\boxed{dy \quad \text{o bien} \quad df = f'_u(u'_x dx + u'_z dz) + f'_v(v'_x dx + v'_z dz)}$$

es decir:

$$\boxed{dy \quad \text{o bien} \quad df = f'_u \cdot du + f'_v \cdot dv}$$

Así, la expresión de una diferencial cualquiera (simple o total) de una función, expresada por una o varias variables, es siempre la misma, cualquiera que sea o sean las variables independientes.

Ejemplo: En el estudio de las cuerdas vibrantes (así como en el estudio de la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de una línea que presenta una autoinducción y una capacidad uniformemente repartidas), se encuentra que la elongación de la cuerda, a la distancia x de la fuente (o bien la intensidad de corriente a la distancia x) viene dada por la función:

$$y = f(x + at) + \varphi(x - at)$$

donde t es el tiempo, a es la velocidad de propagación, f y φ son funciones cualquiera.

Se pide demostrar que:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Esta última expresión fue establecida por D'ALEMBERT (el gran matemático francés del siglo XVIII), en el estudio de las cuerdas vibrantes, e integrando esta ecuación en derivadas parciales encontró el valor de y.

— Daremos, al final del Tomo V sobre las *Ecuaciones Diferenciales,* el detalle del cálculo que permite integrar esta ecuación en derivadas parciales, así como la solución original encontrada por D'ALEMBERT.

— Hagamos:

$$x + at = u \quad \text{y} \quad x - at = v,$$

por tanto:

$$y = F(u, v)$$

es una función compuesta, pero u y v dependen de dos variables independientes x y t.

Tenemos:

$$\left|\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x}=1 & \text{y} & \dfrac{\partial u}{\partial t}=a \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=1 & \text{y} & \dfrac{\partial v}{\partial t}=-a. \end{array}\right.$$

Calculemos entonces $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial t}$. Se tendrá, partiendo de:

$$y=f(x+at)+\varphi(x-at):$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=f'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f'_u\cdot 1+\varphi'_v\cdot 1$$

o también:

$$=\frac{df}{du}+\frac{d\varphi}{dv}.$$

Del mismo modo, se tendrá:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=f'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\varphi'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial t}=f'_u\cdot a+\varphi'_v\cdot(-a)=a\frac{df}{du}-a\frac{d\varphi}{dv}$$

Diferenciemos ahora $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ respecto a x y $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ respecto a t; como cada una de ellas es una suma, se tendrá:

(1) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2},$$

y

(2) $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}.$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Repetimos que integraremos esta última ecuación en derivadas parciales en el final del Tomo V: **(Ecuaciones diferenciales)** utilizando el método de D'ALEMBERT, y dando el detalle de los cálculos.

103. Diferencial segunda total de una función de dos variables independientes. — Sean x y z las dos variables independientes, y sea la función:

$$y=f(x,z)$$

cuya diferencial total segunda vamos a calcular.

Por definición, la diferencial total es, como hemos visto más arriba:

$$dy = f'_x \cdot dx + f'_z \cdot dz$$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz.$$

Pero, esta expresión admite a su vez una diferencial total d^2y. Para esto es necesario tomar la derivada parcial de dy respecto a x, multiplicada por dx, a la cual se añade la derivada parcial de dy respecto a z, multiplicada por dz, y como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

tendremos:

$$d^2y = (f''_{x^2} dx + f''_{xz} dz)dx + (f''_{zx} dx + f''_{z^2} dz)dz$$

$$d^2y = f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xz} dx\, dz + f''_{z^2} dz^2$$

o también:

$$\boxed{d^2y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} dx\, dz + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz^2}$$

fórmula que se parece por su estructura a la del párrafo anterior, en el caso de una función compuesta $y = f(u, v)$, donde u y v eran las dos funciones de una sola variable x.

— Como estos cálculos intervienen en la teoría de las superficies y en las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, señalaremos que para simplificar la escritura, se utiliza una nueva notación.

Se hace:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = q,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = r, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial^2 z} = \frac{\partial q}{\partial z} = t,$$

y

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} = s.$$

Lo cual permite escribir, de forma más sencilla:

$$dy = p \cdot dx + q \cdot dz$$

y, por fin:

$$\boxed{d^2y = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dz + t\,dz^2}$$

Ejemplo. — Sea la función de dos variables independientes.

$$y = x^3 + 2x^2z + z^4.$$

Calcular d^2y.

— Se tendrá sucesivamente:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p = 3x^2 + 4xz,$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = q = 2x^2 + 4z^3,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = 6x + 4z,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} = s = 4x,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\partial q}{\partial z} = t = 12z^2,$$

lo que nos da:

$$dy = (3x^2 + 4xz)dx + (2x^2 + 4z^3)dz,$$

y

$$d^2y = (6x + 4z)dx^2 + 8x\,dx\,dz + 12z^2\,dz.$$

104. Fórmula de Taylor para las funciones de dos variables independientes. — Consideremos la función $y = f(x, z)$ donde x y z son dos variables independientes.

Se trata de calcular el nuevo valor de la función y, cuando x aumenta en una pequeña cantidad h y z aumenta en una pequeña cantidad l.

$$y + \Delta y = f(x + h, z + l). \tag{1}$$

— Sea la función:

$$f(x + hu, z + lu). \tag{2}$$

La expresión (2) es igual a la expresión (1) cuando $u = 1$; por tanto, si se considera la expresión (2) como una función de u, podemos escribir:

$$\varphi(u) = f(x + hu, z + lu). \tag{3}$$

Desarrollemos esta función de u en serie de MAC-LAURIN:

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{u}{1!}\varphi'(0) + \frac{u^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots \tag{4}$$

Expresemos las derivadas sucesivas respecto a u en función de las derivadas parciales respecto a x y a z.

Hagamos:

$$t = x + hu, \qquad v = z + lu; \tag{5}$$

se tendrá también:

$$\varphi'(u) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cdot \frac{dt}{du} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du}. \tag{6}$$

Pero, según las ecuaciones (5), tenemos:

$$\frac{dt}{du} = h \quad \text{y} \quad \frac{dv}{du} = l;$$

pero como $\varphi(u)$ es una función de x y de z, tendremos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Y como según las ecuaciones (5), tenemos:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 1,$$

resulta que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Llevemos estos valores a la ecuación (6):

$$\varphi'(u) = h\frac{\partial\varphi}{\partial x} + l\frac{\partial\varphi}{\varphi z}. \tag{7}$$

Derivemos ahora esta última expresión:

$$\begin{aligned}\varphi''(u) &= h\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + l\frac{\partial\varphi'}{\partial z} \\ &= h\left[h\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + l\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\right] + l\left[h\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} + l\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right] \\ &= h^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2hl\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} + l^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.\end{aligned} \tag{8}$$

Por el mismo procedimiento obtendríamos la derivada tercera $\varphi'''(u)$:

$$\varphi'''(u) = h^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} + 3h^2l\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial z} + 3hl^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial z^2} + l^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}, \tag{9}$$

y así sucesivamente para las derivadas de orden superior.

— Hagamos ahora $u = 0$ en $\varphi(x, z)$ y en todas las derivadas:

$$\varphi(0) = f(x, z)$$

es decir, que $\varphi(u)$ se reemplaza por $f(x, z)$, lo cual nos da, según las ecuaciones 7, 8 y 9:

$$\varphi'(0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + l\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\varphi''(0) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hl\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + l^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\varphi'''(0) = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2l\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial z} + 3hl^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial z^2} + l^3\frac{\partial^3 f}{\partial z^3},\ldots$$

Llevemos estos valores a la ecuación (4):

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= f(x + hu, z + lu)\\ &= f(x, z) + \frac{u}{1!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + l\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &+ \frac{u^2}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hl\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + l^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) + \cdots\end{aligned}$$

Basta ahora, para obtener el nuevo valor $f(x + h, z + l)$ de la función y, con hacer $u = 1$, en esta última fórmula.

Se obtiene así *la fórmula de Taylor para una función de dos variables independientes:*

$$\boxed{\begin{aligned}f(x + h, z + l) &= f(x, z) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + l\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &+ \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hl\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + l^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) + \cdots\end{aligned}}$$

según las potencias de h y de l.

Ejemplo. — Sea la función:

$$y = f(x, z) = Ax^2 + Bxz + Cz^2.$$

Si x aumenta en h y z en l, desarrollar la función $f(x + h, z + l)$, según las potencias crecientes de h y de l.

— Se tiene sucesivamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + Bz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = Bx + 2Cz,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = B, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2C.$$

Las derivadas terceras, cuartas, etc., son todas nulas y se tendrá:

$$f(x + h, z + l) = (Ax^2 + Bxz + Cz^2) + h(2Ax + Bz) + l(Bx + 2Cz) + (Ah^2 + Bhl + Cl^2).$$

CAPITULO XII

CURVATURA DE LAS CURVAS Y RADIOS DE CURVATURA

105. La curvatura de una curva. — Toda persona tiene la noción de «curvatura» de un círculo, o incluso de una curva cualquiera. Así, en una circunferencia, cuanto menor es el radio, tanto más curvada es la curva. Inversamente, si el radio es muy grande, la circunferencia es mucho menos curvada. Se puede, por tanto, precisar la noción de «*curvatura*» de un círculo y decir que la curvatura es tanto mayor cuanto menor es el radio; por esto, podremos tomar para la función, que llamaremos «*curvatura C*» una expresión que varía inversamente con el radio. La función más sencilla es, evidentemente:

$$C = \frac{1}{R}$$

donde R es el radio.

Pero, debemos precisar más, con objeto de extender la noción de «*curvatura*», a todas las curvas. Así, por ejemplo, en una parábola la curvatura es máxima en el codo; en una elipse la curvatura en el centro es menor que en los extremos, etc.

— Además, se comprende que la curvatura de una curva *depende de las variaciones de inclinación de la tangente* a la curva: en efecto, cuanto mayor es la *rapidez de variación* de la inclinación de la tangente a la curva, tanto más curvada es la curva (¡incluso podríamos decir que, a esto precisamente, se debe la curvatura de la curva!).

— Pero, para poder comparar la curvatura de las diversas curvas, es evidentemente necesario compararlas, *para una misma longitud de arco de curva.* Se ve así, que a longitud de curva igual, la curva más «*curvada*» será aquella en que *la inclinación de la tangente a la curva variará más rápidamente.*

— Podemos ahora definir matemáticamente la «*curvatura*» de una curva.

— *Definición de curvatura.—Llamaremos «curvatura» de una curva a la variación de la inclinación de la tangente a dicha curva, referida a la unidad de arco.*

Esta definición corresponde a la idea que nos hacemos de curvatura; en efecto, cuanto más curvada sea la curva, más rápidamente varía la inclinación de la tangente a la curva.

— Calculemos primero la curvatura de un círculo.

Sobre el círculo de la figura 34 consideremos el punto P, en el cual la tangente a la curva está inclinada en un ángulo α. Si P se mueve hacia P', describiendo un arco Δl, la tangente a la curva varía en $\Delta\alpha$, y el ángulo que forma con la horizontal se convierte en $(\alpha + \Delta\alpha)$.

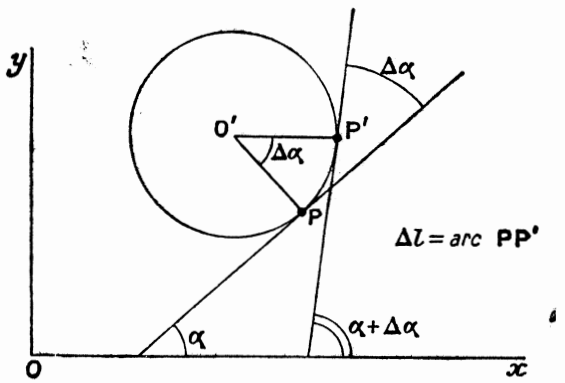

FIG. 34

Se ve así que el ángulo PO'P' que forman los dos radios es también igual a $\Delta\alpha$ (ya que estos dos radios son perpendiculares a las dos tangentes).

— *Por definición,* la curvatura será:

$$C = \frac{\Delta\alpha}{\Delta l}.$$

Pero, si R es el radio del círculo, tenemos:

$$\Delta l = R \cdot \Delta\alpha.$$

Será, por tanto:

$$C = \frac{\Delta\alpha}{R \cdot \Delta\alpha} = \frac{1}{R} = \text{constante.}$$

— Es decir, que encontramos aquí, para el círculo, que la curvatura es la inversa del radio. Podemos también decir que el radio R es el inverso de la curvatura.

Caso de una curva cualquiera $y = f(x)$.

Coloquémonos en un punto P cualquier,a de abscisa x y ordenada y. La tangente en P forma un ángulo α con el eje de las x (fig. 35). Desplacémonos desde P hasta P′ a lo largo de un arco, de longitud Δl. Podremos decir que la curvatura media entre P y P′ es:

$$C = \frac{\Delta\alpha}{\Delta l}.$$

Pero esto no significa nada, ya que la curvatura varía a lo largo de la curva. Es necesario definir la curvatura *en un punto.*

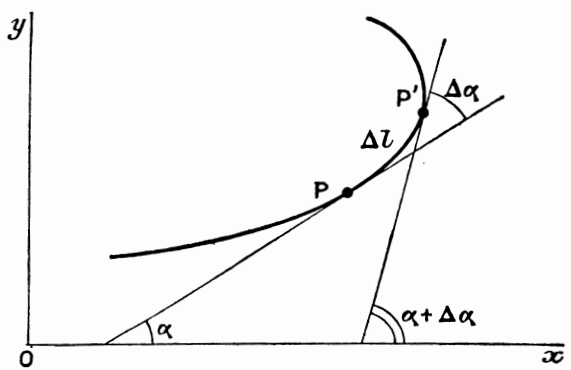

FIG. 35

— Si Δl tiende hacia cero, P′ tiende hacia P y $\Delta\alpha$ tiende haca cero, se podrá por tanto decir que, en el límite, cuando Δl se hace nulo, tendremos la curvatura en el punto P:

$$C_P = \text{límite}_{\Delta l \downarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} = \alpha'$$

o bien, haciendo intervenir las diferenciales:

$$C = \frac{d\alpha}{dl}.$$

Es necesario, por tanto, calcular $d\alpha$ y dl.

— Pero hemos calculado, página 194, la diferencial de un arco de curva dl:

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$
$$= \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

Por otra parte, tenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'$$

de donde:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\, y' = \operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx}.$$

Diferenciemos:

$$d\alpha = \frac{1}{1 + y'^2} \cdot y'' dx \quad \text{(es de la forma } \frac{1}{1 + u^2} \cdot du\text{)}.$$

Tendremos, por tanto, para la curvatura en P:

$$C = \frac{d\alpha}{dl} = \frac{\frac{1}{1 + y'^2} y'' \, dx}{\sqrt{1 + y'^2} \cdot dx}$$

$$C = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

106. Radio de curvatura de un punto de una curva. — Se llama «*radio de curvatura*» en un punto cualquiera de una curva, al radio del círculo cuya tangente en el punto considerado tiene la misma pendiente que la tangente a la curva, y que se confunde con la curva, en las proximidades del punto considerado.

Precisaremos todavía más adelante, esta definición de círculo tangente a la tangente a la curva, y que se confunde con la curva *en las proximidades del punto considerado.*

— Por analogía con el círculo, el valor de este radio de curvatura en un punto cualquiera será *la inversa de la curvatura,* y lo designaremos por R:

$$R = \frac{1}{C}.$$

Se tendrá, por tanto:

$$\boxed{R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}}$$

Sabemos, además, por otra parte, que en un máximo o en un mínimo, tenemos $y' = 0$, en este momento el radio de curvatura se reduce a:

$$\boxed{R = \frac{1}{y''}}$$

Ejemplos:

1.° Sea la curva $y = \operatorname{sen} x$.

Calcular el radio de curvatura en el máximo, para $x = \frac{\pi}{2}$.

— Tenemos:

$$y' = \cos x \qquad y'' = -\operatorname{sen} x$$

y para $x = \frac{\pi}{2}$, nos queda $y'' = -1$, de donde:

$$R = \frac{1}{y''} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Es, por tanto, igual a la ordenada máxima de y. La curvatura en el máximo es así la misma que la de un círculo de radio 1, cuyo centro se encontraría colocado sobre el eje de las x.

El signo — indica que el radio de curvatura está dirigido hacia abajo, es decir, que la concavidad de la curva está dirigida hacia abajo.

— Para $x = \frac{3\pi}{2}$, momento en que la función tiene un mínimo, tenemos:

$$y' = 0 \qquad y'' = -(-1) = +1,$$

de donde:

$$R = +1.$$

2.° Sea la hipérbola $y = \frac{1}{2}$. Calcular R para $x = 1$.

— Tenemos:

$$y' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} \qquad y'' = 2x^{-3}$$

y

$$x = 1 \qquad y = -1 \qquad y'' = 2,$$

de donde:

$$R\,\frac{[1+(-1)^2]^{3/2}}{2} = \frac{2^{3/2}}{2} = \sqrt{2}.$$

3.° Sea la curva $y = e^x$. Calcular R para $x = 0$.

— Tenemos:

$$y' = e^x = 1 \quad \text{y} \quad y'' = e^x = 1,$$

de donde:

$$R = \frac{(1+1)^{3/2}}{1} = \sqrt{8}.$$

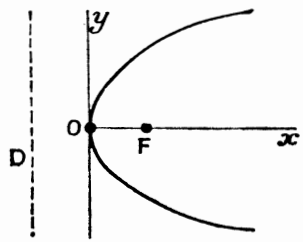

FIG. 36

4.° Radio de curvatura de la parábola (fig. 36):

$$y^2 = 2px,$$

siendo p el doble de la distancia del foco al vértice de la parábola.

Tenemos, diferenciando:

$$2ydy = 2pdx$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Deducimos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{y^2}\cdot\frac{p}{y} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

El radio de curvatura es, por tanto:

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{3/2}}{-\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{\left(\frac{y^2+p^2}{y^2}\right)^{3/2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{(y^2+p^2)^{3/2}}{p^2}.$$

En el vértice O, donde $y = 0$, nos queda, en valor absoluto:

$$R = \frac{(p^2)^{3/2}}{p^2} = p.$$

Es decir, en el vértice, la parábola se confunde en una pequeña región con el círculo de radio p, cuyo centro está al doble de la distancia focal.

— En la fabricación de espejos parabólicos de proyectores o de telescopios, se parte de espejos esféricos y se «lima» el vidrio más y más a partir del vértice, con objeto de obtener una parábola.

5.° Radio de curvatura de la curva:

$$y = \frac{1}{1 + a^2x^2}$$

en su máximo (fig. 37).

Esta curva aparece en Radioelectricidad cuando se estudia la curva de resonancia de un circuito oscilante, constituido por una bobina de resistencia R y de inductancia L, en serie con un condensador de capacidad C. En efecto, la curva de resonancia de dicho circuito, llamado circuito oscilante, es la curva que da la variación de la corriente I en función de la frecuencia f (permaneciendo C fijo). Se encuentra, mediante un cambio de variable adecuado, para tener un eje de simetría en la curva, que ésta tiene por ecuación:

$$y = \frac{1}{1 + a^2x^2} \qquad \left(\text{donde } x = \frac{df}{f}, \quad f = \text{frecuencia}\right)$$

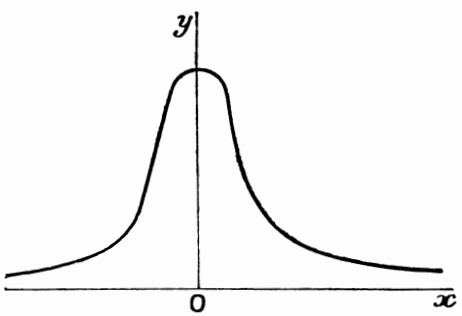

FIG. 37

Se comprende que *cuanto más puntiaguda sea la curva,* tanto mayor será la *selectividad,* puesto que la ordenada y variará muy rápidamente en las proximidades del máximo. Es necesario, por tanto, que en el vértice, el radio de curvatura sea mínimo. Calculemos su valor en el vértice, donde la derivada se anula:

$$y' = -\frac{1}{(1 + a^2x^2)^2} \cdot 2a^2x = \frac{-2a^2x}{(1 + a^2x^2)^2} = 0 \quad \text{de donde } x = 0,$$

y

$$y'' = \frac{(1 + a^2x^2)^2(-2a^2) + 4a^2x(1 + a^2x^2) \cdot 2a^2x}{(1 + a^2x^2)^4},$$

y, para $x = 0$, nos queda en valor absoluto:

$$y'' = 2a^2$$

de donde:

$$R = \frac{1}{y''} = \frac{1}{2a^2},$$

es por tanto necesario que a sea lo mayor posible.

Pero, en Radio, si hacemos $\alpha = \frac{R}{2L}$, que se llama coeficiente de amortiguamiento (y donde R representa la resistencia óhmica) tenemos:

$$a = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{2\pi f}{\frac{R}{2L}},$$

hace falta, en resumen, que α sea lo más pequeño posible, es decir, que tengamos una pequeña resistencia y una gran inductancia. Vemos así la ventaja que presentan las bobinas con núcleo de hierro (polvo de hierro, aislado y comprimido) que permiten aumentar L, debido a la permeabilidad del hierro, sin aumentar la resistencia óhmica.

— Comprendemos así que la teoría y la práctica forman un todo, y no dos dominios separados, contrariamente a lo que piensan ciertas mentes simplistas.

6.° *Radio de curvatura de la catenaria.*

La catenaria es la curva que adopta una línea eléctrica aérea suspendida de sus dos extremos, o también la curva que forma un hilo flexible, o una cadena, sujeta por sus dos extremos.

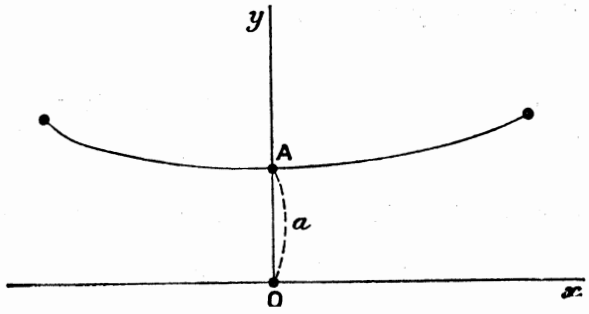

FIG. 38

— Estudiaremos en *detalle* la ecuación de esta curva, en el Tomo III (*Cálculo Integral*), cuando calculemos la longitud de esta curva.

— La catenaria tiene por ecuación (fig. 38):

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Calculemos R en el vértice A.

Tenemos:

$$y' = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

El radio de curvatura será:

$$R = \frac{\left[1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)} = \frac{\left[1 + \frac{1}{4}e^{\frac{2x}{a}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{2x}{a}} - \frac{1}{4}\ 2\right]^{3/2}}{\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{4}e^{\frac{2x}{a}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{2x}{a}} + \frac{2}{4}\right]^{3/2}}{D} = \frac{\left[\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2\right]^{3/2}}{D}$$

$$= \frac{\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^3}{\frac{1}{a}\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)} = \frac{a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4} = \frac{y^2}{a}.$$

En el vértice, $y = a$, y tenemos:

$$R = a.$$

Es decir, la curva se confunde en una pequeña región alrededor del punto A, con un círculo de radio igual a a, que es la distancia del origen de coordenadas al mínimo de la curva.

7.° Buscar el mínimo del radio de curvatura de la parábola de eje vertical:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Tenemos:

$$y' = 2ax + b \quad \text{y} \quad y'' = 2a.$$

Por tanto:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{2a},$$

siendo $2a$ una constante, basta que el numerador sea mínimo. Pero, como es una suma de dos cantidades positivas $(1 + y'^2)$, el mínimo tendrá lugar cuando:

$$y' = 0$$

o sea:

$$2ax + b = 0$$

o bien:

$$x = -\frac{b}{2a},$$

es decir, en el vértice de la parábola, como sabemos.

8.° *Radio de curvatura de la curva:*

$$y^2(2 - x) = x^3 \tag{1}$$

en el punto en que $x = +1$.

Derivemos esta función implícita respecto a x:

$$-y^2 + (2 - x)2y\,y' = 3x^2 \tag{2}$$

Derivemos una segunda vez:

$$-2y\,y' + (2 - x)2y\,y'' + (2 - x)2(y')^2 - 2y\,y' = 6x. \tag{3}$$

Según la ecuación (1) tenemos para $x = 1$:

$$y = \pm 1,$$

la ecuación (2) nos da, tomando $y = +1$:

$$-1 + 2y' = 3 \quad \text{de donde} \quad y' = 2,$$

la ecuación (3) nos da, del mismo modo:

$$-4 + 2y'' + 8 - 4 = 6, \quad \text{de donde} \quad y'' = 3.$$

Se tendrá así:

$$R = \frac{(1+4)^{3/2}}{3} = \frac{25}{3\sqrt{5}}.$$

9.° Encontrar el punto de mayor curvatura de la curva:

$$y = \operatorname{Log} x.$$

— Tenemos:

$$y' = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad y'' = -\frac{1}{x^2}.$$

La curvatura es:

$$C = \frac{1}{R} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Anulemos por tanto la derivada de C (tomando solamente el valor absoluto de C):

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1 - 2x^2}{(1+x^2)^{5/2}} = 0$$

de donde:

$$x = +\frac{1}{\sqrt{2}},$$

en este momento, tenemos $y = -\frac{1}{2}\operatorname{Log} 2$ y veríamos que corresponde a un máximo de curvatura.

107. Observación importante sobre los puntos de inflexión. — Hemos visto en el Tomo I lo que se llama *punto de inflexión* de una curva: es un punto en el que la tangente a la curva atraviesa a la curva de parte a parte, y donde la concavidad de la curva cambia de sentido. *En dicho punto la curva es una línea recta, sobre una pe-*

queña longitud. Resulta que en este punto el radio de curvatura de la curva deberá ser infinito:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \infty$$

de donde:

$$\boxed{y'' = 0}$$

Esta condición es necesaria, pero no es suficiente: hemos demostrado en el Tomo I, que era también necesario que y' no cambie de signo.

— Se demuestra por fin (no haremos la demostración), que en el caso de un *punto de retroceso,* como ocurre en la curva:

$$y = x^{2/3} \qquad \text{(para } x = 0\text{)}$$

estudiada en el Tomo I, el radio de curvatura en este punto tiende hacia cero. El lector puede verificarlo fácilmente para la curva anterior, cuando $x = 0$.

Ejemplo:

Calcular el radio de curvatura de la curva:

$$f(x, y) = y^3 - 2x^3 - 4xy + y = 0$$

en el origen de la curva (o sea para $x = 0$ e $y = 0$).

— Calculemos y' e y'':

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-6x^2 - 4y}{3y^2 - 4x + 1} = \frac{6x^2 - 4y}{3y^2 - 4x + 1}$$

$$y'' = \frac{(3y^2 - 4x + 1)(12x + 4y') - (6x^2 + 4y)(6yy' - 4)}{(3y^2 - 4x + 1)^2}.$$

— Para:

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0$$

tenemos:

$$y' = 0 \quad \text{e} \quad y'' = 0,$$

el radio de curvatura es entonces igual a:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{1}{0} = \infty,$$

tenemos un punto de inflexión en el origen de la curva.

— En el Tomo VI, *Geometría analítica plana,* estudiaremos más en detalle los puntos de inflexión.

108. Caso de una curva en coordenadas polares: $\rho = f(\theta)$. — Sea la figura 39, y sea un punto P cualquiera sobre la curva, de abscisa x y de ordenada y. Tenemos:

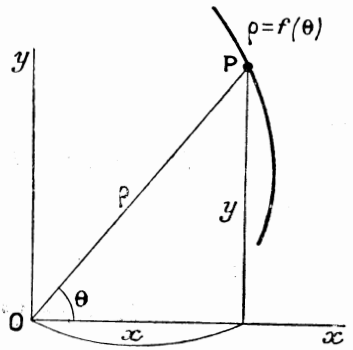

FIG. 39

$$x = \rho \cdot \cos\theta \quad \text{y} \quad y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta,$$

por tanto:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{d\rho \cdot \operatorname{sen}\theta + \rho \cdot \cos\theta\, d\theta}{d\rho \cdot \cos\theta - \rho \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\theta}$$

o dividiendo arriba y abajo por $d\theta$:

$$y'_x = \frac{\rho' \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta} = u.$$

Deducimos la derivada segunda de esta función de función:

$$y_x'' = u_\theta' \cdot \theta_x' = u_\theta' \cdot \frac{1}{x_\theta'} = \frac{u_\theta'}{x_\theta'}$$

$$= \frac{\begin{array}{r}(\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta)(\rho''\operatorname{sen}\theta + 2\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta) \\ -(\rho'\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta)(\rho''\cos\theta - 2\rho'\operatorname{sen}\theta - \rho\cos\theta)\end{array}}{(\rho'\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2(-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta)},$$

desarrollando y tomando como factor ($\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$), en el numerador, nos queda:

$$y_x'' = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{D^3}.$$

Llevando los valores de y'' y de y' a la fórmula del radio de curvatura, se obtiene:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{\rho'\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{D^3}}$$

o bien, desarrollando el numerador y simplificando:

$$\boxed{R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}}$$

Ejemplos:

1.° *Espiral logarítmica* $\rho = ae^{m\theta}$, donde a es el valor inicial del radio vector, cuando $\theta = 0$.

Se podría aplicar la fórmula precedente del radio de curvatura R, pero aquí es mucho más práctico utilizar la fórmula:

$$R = \frac{dl}{d\theta},$$

donde:

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \cdot d\theta^2} \quad \text{o bien} \quad \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta.$$

Pero:

$$\rho' = mae^{m\theta} = m\rho,$$

de donde:

$$dl = \sqrt{m^2\rho^2 + \rho^2} \cdot d\theta = \rho\sqrt{1 + m^2}\, d\theta,$$

lo que dará para R:

$$R = \frac{\rho\sqrt{1 + m^2}\, d\theta}{d\theta} = \rho\sqrt{1 + m^2}.$$

2.° *Caracol de Pascal* (o cardiode):

$$\rho = a + b\cos\theta.$$

Tenemos:

$$\rho' = -b\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \rho'' = -b\cos\theta,$$

y

$$R = \frac{[(a + b\cos\theta)^2 + b^2\operatorname{sen}^2\theta]^{3/2}}{(a + b\cos\theta)^2 + 2b^2\operatorname{sen}^2\theta - (a + b\cos\theta)(-b\cos\theta)}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta)^{3/2}}{a^2 + 2b^2 + 3ab\cos\theta}$$

En el punto en que $\theta = 0$, nos queda:

$$R = \frac{(a + b)^3}{a^2 + 3ab + 2b^2}$$

Caso de una curva en coordenadas paramétricas:

Sea:

$$\begin{cases} y = \varphi(\theta) \\ y = f(\theta) \end{cases}$$

la ecuación de la curva.

Calcularíamos y_x' e y_x'' como hemos indcado en el estudio de las derivadas del Tomo I:

$$y_x' = \frac{y_\theta'}{x_\theta'} \quad \text{y} \quad y_x'' = \frac{x_\theta' \cdot y_\theta'' - y_\theta' \cdot x_\theta''}{(x_\theta')^3}.$$

Basta llevar estos valores a la fórmula de R:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

lo cual no representa ninguna dificultad.

109. Círculo de curvatura o círculo osculador. — La tangente en un punto de una curva tiene la misma pendiente que la curva en este punto, y el círculo de curvatura será el que tenga la misma curvatura que la curva en el punto considerado. Es el círculo que se confunde con la curva en las proximidades del punto considerado.

— Este círculo se llama *círculo osculador.*

— Para encontrar la posición del centro de este círculo, con objeto de poder trazarlo, basta trazar la tangente a la curva en el punto considerado. Después trazar por este punto la perpendicular a esta tangente (es la *normal* a la curva) y llevar sobre esta perpendicular, y en el sentido de la concavidad de la curva, una longitud igual al radio de curvatura. Se obtiene así, el *centro de curvatura.*

— Es necesario ahora el calcular las *coordenadas del centro.*

— El método que vamos a utilizar es muy simple, muy claro y muy corto, al contrario del método nebuloso utilizado habitualmente...

— Sea un punto P cualquiera la curva $y = f(x)$, y sean x e y sus coordenadas (fig. 40).

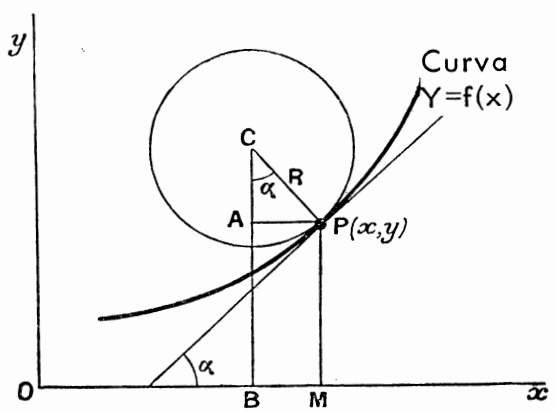

FIG. 40

— Busquemos las coordenadas x_c e y_c del centro de curvatura C del círculo osculador en P, y sea α, el ángulo que forma la tangente en P con la horizontal. Este ángulo se encuentra en C, y se tiene:

$$\begin{aligned} y_c = \text{BC} &= \text{BA} + \text{AC} \\ &= y + \text{R}\cos\alpha \\ x_c = \text{OB} &= \text{OM} - \text{BM} \\ &= x - \text{R}\,\text{sen}\,\alpha. \end{aligned}$$

Pero sabemos solamente que $\text{tg}\,\alpha = y'$.

Es decir, tenemos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

donde:

$$\text{R} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Tendremos por tanto:

y

$$\left| \begin{array}{l} x_c = x - \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \cdot \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\ y_c = y + \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \end{array} \right.$$

o sea, simplificando:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_c = x - \dfrac{y'}{y''}(1+y'^2) \\ y_c = y + \dfrac{(1+y'^2)}{y''} \end{array}}$$

Es necesario, naturalmente, en cada caso particular, reemplazar x en y' y en y'' por la abscisa del punto P considerado.

Ejemplo. — Sea la parábola $y^2 = 2px$ (fig. 41).

Se verá en analítica, que la distancia del vértice O al foco F es igual a $\frac{p}{2}$.

— Calculemos y' e y''. Diferenciemos $y^2 = 2px$:

$$2ydy = 2pdx \quad \text{de donde} \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{p}{y}$$

y

$$y'' = -\frac{p}{y^2} \cdot y' = \frac{p}{y^2} - \cdot \frac{p}{y}$$
$$= -\frac{p^2}{y^3}.$$

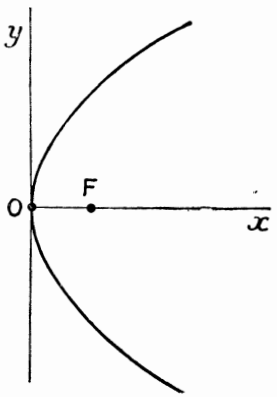

FIG. 41

Se tendrá:

$$x_c = x - \frac{\frac{p}{y}\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)}{-\frac{p^2}{y^3}}$$

$$= x + \frac{y^2}{p}\left(\frac{y^2 + p^2}{y^2}\right) = x + \frac{p^2 + y^2}{p}$$

$$= x + \frac{p^2 + 2px}{p} = x + p + 2x$$

$$= 3x + p,$$

y

$$y_c = y + \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)}{-\frac{p^2}{y^3}} = y - y\frac{(y^2 + p^2)}{p^2}$$

$$= y - y\left(\frac{2px + p^2}{p^2}\right) = y - y\left(\frac{2x}{p} + 1\right)$$

$$= -\frac{2yx}{p} = -\frac{2y}{p} \cdot \frac{y^2}{2p}$$

$$= -\frac{y^3}{p^2}.$$

En el vértice de esta parábola $x = 0$ e $y = 0$, lo cual nos da:

$$\left| \begin{array}{l} x_c = p \\ y_c = 0. \end{array} \right.$$

El centro de curvatura está, por tanto, al doble de la distancia del vértice al foco F y la parábola, en las proximidades de su vértice se confunde con un círculo cuyo centro está en este lugar.

110. La verdadera naturaleza del círculo osculador. — En realidad hay una infinidad de círculos que son tangentes a la tangente a la curva en un punto cualquiera, siendo sus radios cualesquiera, y sus centros están todos situados en la normal a la curva.

— *Pero entre todos estos círculos, hay tan sólo uno, y este es el círculo osculador, que se aproxima en todo lo posible, a la curva en las proximidades del punto considerado.*

— La demostración es muy interesante desde el punto de vista matemático, y el lector verá, de un modo tangible, por qué esta parte de las matemáticas se llama *Análisis*. Vamos, en efecto, a analizar un poco de cerca, lo que ocurre en las proximidades del punto considerado.

— Para esto, tomemos como ejes de coordenadas la tangente a la curva en el punto considerado, como eje de las x y la normal a la curva como eje de las y (fig. 42). En resumen, a colocarnos en un mínimo, en P.

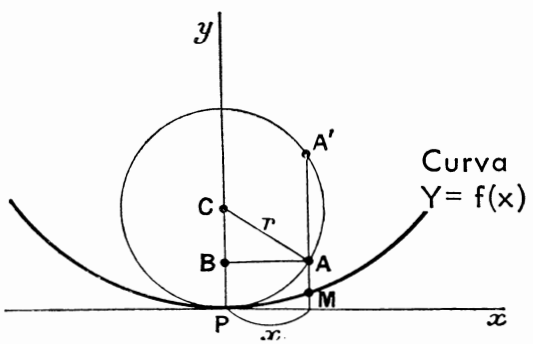

FIG. 42

— Tracemos un círculo *cualquiera* tangente a la curva en el punto P, tangente por tanto al eje de las x.

— Se definirán las proximidades del círculo y de la curva considerando dos puntos, uno M sobre la curva, otro A sobre el círculo, que tengan la misma abscisa y calculando la diferencia de las dos ordenadas.

— Sea y_M la ordenada del punto M de la curva. Para encontrar la ordenada del punto A busquemos la ecuación del círculo llamando

x e y a las coordenadas del punto A del círculo. Tenemos, en el triángulo ABC:

$$x^2 + (r - y)^2 = r^2$$

o bien:

$$y^2 - 2ry + x^2 = 0$$

de donde:

$$y = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 - 4x^2}}{2} = r \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Para un valor de x hay, por tanto, dos valores de y: uno correspondiente al punto A' y el otro correspondiente al punto A. El correspondiente a A es:

$$y_A = r - \sqrt{r^2 - x^2}. \tag{1}$$

Estudiemos, por tanto, la diferencia y_A e y_M, lo que nos dará información sobre la proximidad del círculo y de la curva. Esta diferencia es variable cuando x varía (es nula para $x = 0$), llamemos $\varphi(x)$ a esta diferencia, ya que es una función de x:

$$y_A - y_M = \varphi(x).$$

Desarrollemos esta función en serie de MAC-LAURIN:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1!} \cdot \varphi'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot \varphi''(0) + \ldots$$

pero, $\varphi(0) = 0$ en el punto P, del mismo modo $\varphi'(0) = 0$, ya que en el punto P la tangente al círculo es horizontal ($y'_P = 0$) y la tangente a la curva es también horizontal ($y'_P = 0$). Calculemos $\varphi''(0)$.

—Pero φ'' es igual a:

$$\varphi''(x) = y''_A - y''_M$$

pero, para el círculo tenemos, según la ecuación (1):

$$y'_A = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{(que es nula para } x = 0)$$

Deducimos:

$$y'' = \frac{\sqrt{r^2 - x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}}{r^2 - x^2}$$

que, para $x = 0$, *da* $y'' = \dfrac{1}{r}$.

Se tendrá, por tanto:

$$\varphi(x) = 0 + \frac{x}{1!} \cdot 0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{1}{r} - y''_M\right)_{x=0} + \cdots$$

$$= \frac{x^2}{2!}\left(\frac{1}{r} - y''_M\right)_{x=0} + \cdots$$

Es decir, esto será un *infinitésimo de segundo orden,* a menos que:

$$\frac{1}{r} - y''_M = 0 \quad \text{o bien} \quad y''_M = \frac{1}{r}$$

en cuyo caso $\varphi(x)$ sería un *infinitésimo de tercer orden,* y el círculo será entre todos los círculos, *el que está más próximo a la curva* (ya que difiere de la curva en un infinitésimo de orden tercero).

Es decir, en el punto P, en el momento del mínimo, el radio de curvatura de la curva es igual a:

$$R = \frac{1}{y''} \quad \text{o bien} \quad y'' = \frac{1}{R}.$$

Resulta que si el radio r de nuestro círculo es igual al radio R del círculo osculador, o también *si el círculo es el círculo de curvatura, la proximidad con la curva será más grande.*

— Esta observación se aplica, prácticamente, para reemplazar una curva cualquiera, más o menos complicada de estudiar y trazar, por un círculo que tiene la misma curvatura y que se acerca en todo lo posible a la curva y que es el círculo osculador.

— Y este cálculo justifica la palabra *Análisis,* que se da frecuentemente al cálculo diferencial.

LISTA RECAPITULATIVA
DE LAS
FORMULAS DEL TOMO II

Fórmula de Mac-Laurin:

$$y = f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) \ldots + \frac{x^n}{n!}f^n(0).$$

Aplicaciones:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\text{Log}\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$\text{sen}\,x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{x^2}{1!} - \frac{2x^4}{3!} + \frac{32x^6}{6!} \ldots$$

$$\text{arc sen}\,x = \frac{x}{1^1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3x^6}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5x^8}{8} + \ldots$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3x^6}{6} - \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7x^8}{8} - \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6 + \ldots$$

$$\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\left(1 + \frac{x^2}{a^2 2!} + \frac{x^4}{a^4 4!} + \ldots\right)$$

Binomio de Newton:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1!}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}a^{m-3}b^3 + \ldots$$

Otros ejemplos:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(2-\frac{1}{m}\right)\left(2-\frac{2}{m}\right) + \ldots$$

y, si $m \to \infty$: $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e.$

Primera fórmula de Taylor:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}\cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!}\cdot f''(a) + \frac{h^3}{3!}\cdot f'''(a) + \ldots$$

Teorema de los incrementos finitos:

$$f(b) - f(a) = (b-a)\cdot f'(c) \qquad (a < c < b)$$

o bien:

$$f(a+h) - f(a) = h\cdot f'(a+\theta h) \qquad (0 < \theta < 1)$$

Segunda fórmula de Taylor:

$$f(a+h) = f(a) + \left(\frac{x-a}{1!}\right)\cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\cdot f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}\cdot f'''(a) + \ldots$$

Máximo o mínimo de una función: $y = f(x$:

1.º Es necesario que la primera derivada que no se anule sea de orden par.

2.º En este caso:
se tiene un *mínimo* de y si esta derivada es *positiva*;
se tiene un *máximo* de y si esta derivada es *negativa*.

Fórmula de l'Hôpital:

Si $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ da $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$ para $x = a$, el verdadero valor es $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$.

Si $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ da también $\frac{0}{0}$, el verdadero valor de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ es $\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$, o bien $\frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)}$ etc.

Estudio de las series

Regla de Cauchy (serie de términos positivos:

Si $\sqrt[n]{u_n} \leqslant K < 1 \qquad (K \neq 1)$ (si $K = 1$ hay duda)

la serie es convergente.

Si $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$ la serie es divergente.

El límite superior del resto:

$$R_p \leqslant \frac{K^{p+1}}{1 - K}.$$

Regla de d'Alembert:

Si en una serie de términos positivos tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant K < 1, \quad \text{la serie es convergente,}$$

si $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1, \quad \text{la serie es divergente,}$$

si $K = 1$ hay duda.

Excepción. — La serie armónica es divergente:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Cálculo de los complejos

Un vector cualquiera puede *representarse* por una expresión algebraica:

$$\overline{OM} = a + jb$$

longitud $\quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$

desfase $\quad \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{b}{a}$

o bien: $\quad \overline{OM} = r(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)$

o bien: $\quad \overline{OM} = re^{j\varphi}.$ $\qquad (j = \sqrt{-1})$

Tenemos:

$$\cos x = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

Suma, producto y cociente:

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$$

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad)$$

$$r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$(re^{j\varphi})^n = r^n \cdot e^{jn\varphi} \qquad (r\angle\varphi)^n = r^n\angle n\varphi$$

$$\frac{1}{re^{j\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-j\varphi} \qquad r_1\angle\varphi_1 \cdot r_2\angle\varphi_2 = r_1 r_2\angle\varphi_1 + \varphi_2$$

$$\sqrt{re^{j\varphi}} = \sqrt{r} \cdot e^{j\frac{\varphi}{2}} \qquad \frac{r_1\angle\varphi_1}{r_2\angle\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\varphi_1 - \varphi_2$$

Fórmula de Moivre:

(donde $m > 0$ o bien $m < 0$)

$$(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi)^m = \cos m\varphi + j \operatorname{sen} m\varphi.$$

Un número A posee m raíces *enésimas*:

si $$A = r(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi)$$

tenemos: $$X^m = A$$

donde:

$$X = \sqrt[m]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2\pi p}{m}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2\pi p}{m}\right)\right] \qquad (p = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Fórmulas de Euler:

$$e^{jx} = \cos x + j \operatorname{sen} x$$

$$e^{-jx} = \cos x - j \operatorname{sen} x$$

o también:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}.$$

Infinitésimos y diferenciales

Un infinitésimo se pone con la forma:

$$u = Ax^m(1 + \alpha)$$

donde α y x tienden hacia 0.

Ax^m es la parte principal y m es el orden.

—Sea una función $y = f(x)$, si damos a x un incremento fijo dx, muy pequeño, la diferencial de y es:

$$dy = y' \cdot dx$$

es la parte principal del infinitésimo Δy.

Cálculo de las diferenciales:

$y = \operatorname{sen} x$	$dy = \cos x \cdot dx$
$y = \cos x$	$dy = -\operatorname{sen} x \cdot dx$
$y = \sqrt{x}$	$dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx$
$y = e^x$	$dy = e^x \cdot dx$
$y = \operatorname{tg} x$	$dy = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)dx$
$y = \operatorname{Log} x$	$dy = \dfrac{dx}{x}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$dy = -\dfrac{1}{x^2}\,dx$
$y = \operatorname{arc\,sen} x$	$dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{arc\,cos} x$	$dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$dy = \dfrac{dx}{1 + x^2}$
$y = x^m$	$dy = mx^{m-1} \cdot dx$
$y = ax^m$	$dy = max^{m-1} \cdot dx$
$y = u + v + w$	$dy = du + dv + dw$
$y = v \cdot v$	$dy = v \cdot du + u \cdot dv$
$y = \dfrac{u}{v}$	$dy = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Función de función:

$y = f(u)$ donde $u = \varphi(x)$, $dy = f_u' \cdot du = f_u' \cdot u' \cdot dx$

$y = f(u)$ donde $u = \varphi(v)$, y $v = g(x)$, $dy = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx} \cdot dx$

Función implícita:

$$f(x, y) = 0 \qquad dy = -\frac{f_x'}{f_y'} \cdot dx.$$

Función paramétrica:

$$y = f(\theta)$$
$$x = \varphi(\theta) \qquad dy = \frac{y_\theta'}{x_\theta'} \cdot dx.$$

Diferenciales de orden superior:

Tenemos:

$$d^2y = y'' \cdot dx^2$$
$$d^2y = y''' \cdot dx^3 \qquad \text{etc.}$$

— Sea: $y = \operatorname{sen} mx,$

tenemos: $$d^{ne}y = m^n \cdot \operatorname{sen}\left(mx + n\frac{\pi}{2}\right) \cdot dx^n.$$

— Sea $y = \cos mx$

tenemos: $$d^{ne}y = m^n \cdot \operatorname{sen}\left[mx + (n+1)\frac{\pi}{2}\right] dx^n,$$

o también: $$= m^n \cdot \cos\left(ax + n\frac{\pi}{\alpha}\right) dx^n.$$

— Sea $y = e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx \cdot dx$

tenemos: $d^{ne}y = (a^2 + b^2)e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx + n\varphi) \cdot dx^n \quad \left(\text{donde } \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\right)$

— Si $\begin{cases} y = f(t) \\ x = \varphi(t) \end{cases}$ tenemos: $$d^2y = \frac{x_t' \cdot y_t'' - y_t' \cdot x_t''}{x_t'^3} dx^2.$$

Función de función:

Si $y = f(u)$ donde $u = \varphi(x),$

tenemos: $d^2y = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u.$

$d^3y = f'''(u)du^3 + 3f''(u)du \cdot d^2u + f'(u)d^3u.$

Otras diferenciales

Diferencial de un arco de curva $y = f(x)$:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$= \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

En coordenadas polares tendríamos:

$$\left|\begin{array}{l} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \end{array}\right. \quad \text{de donde} \quad dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \cdot d\theta^2}$$

Funciones compuestas:

$$y = f(u, v)$$

donde u y v son funciones de x.

Tenemos: $dy = f_u' \cdot du + f_v' \cdot dv.$

Si tenemos $y = f(u, v, w)$ donde u, v, w son funciones de x, la diferencial total es:

$$dy = f_u' \cdot du + f_v' \cdot dv + f_w' \cdot dw.$$

Casos particulares:

Si $y = u \cdot v \cdot w$ tenemos: $dy = vwdu + uwdv + uvdw.$

Si $y = u^v$ tenemos: $dy = vu^{v-1} \cdot du + u^v \cdot \operatorname{Log} u \cdot dv.$

Diferenciales de una función de varias variables independientes: $y = f(x, z)$.

Tenemos: dy o bien $df = f_x' \cdot dx + f_z' \cdot dz$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz = \mathrm{M} \cdot dx + \mathrm{N} \cdot dz$$

es la diferencial total.

Tenemos siempre:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}.$$

— Si tenemos $\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$, la expresión $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dz$ es la diferencial total de una función $y = f(x, z)$.

— Tenemos un máximo o un mínimo, si tenemos a la vez:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

— Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ o bien $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} < 0$, tenemos un máximo de y.

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ o bien $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} > 0$, tenemos un mínimo de y.

Diferencial segunda de una función compuesta:

Sea $y = f(u, v)$ donde u y v son funciones de la única variable x. La diferencial segunda es:

$$d^2f = f''_{u^2} \cdot du^2 + f''_{v^2} \cdot dv^2 + 2f''_{uv} \cdot du \cdot dv$$

o también, de un modo más práctico:

$$d^2f = u \cdot d^2v + v \cdot d^2u + 2du \cdot dv.$$

— Tendríamos del mismo modo la diferencial tercera:

$$d^3f = u \cdot d^3v + 3du \cdot d^2v + 3dv \cdot d^2u + v \cdot d^3u.$$

— Se ve que estos desarrollos tienen la misma estructura y los mismos coeficientes que $(a + b)^2$ y $(a + b)^3$. Podríamos por tanto generalizar.

Función doblemente compuesta:

Sea: $y = f(u, v)$

donde u y v son funciones de dos variables independientes:

$$u = \varphi(x, z) \quad \text{y} \quad v = g(x, z),$$

tenemos:

$$dy = f_u'(u_x' \cdot dx + u_z' \cdot dz) + f_v'(v_x' \cdot dx + v_z' \cdot dz) = f_u' \cdot du + f_v' \cdot dv$$

Diferencial segunda total de una función de dos variables independientes $y = f(x, z)$:

$$d^2y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} dx\, dz + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz^2$$

Fórmula de Taylor para las funciones de dos variables independientes $y = f(x, z)$:

$$f(x + h, z + l) = f(x, z) + \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + l \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hl \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + l^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) + \ldots$$

Curvatura y radio de curvatura:

— Si $y = f(x)$ tenemos: $R = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$

en un máximo o en un mínimo $R = \dfrac{1}{y''}$.

— Si $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ tenemos: $R = \dfrac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$.

— Coordenadas del círculo osculador:

$$x_c = x - \frac{y'}{y''}(1 - y'^2) \quad \text{y} \quad y_c = y + \frac{(1 + y'^2)}{y''}.$$

EJERCICIOS A RESOLVER

CAPITULO I

Desarrollos en serie

Fórmulas de Mac-Laurin y de Taylor

Desarrollar en serie de Mac-Laurin:

1-1. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$

1-2. $\cos^3 x$

1-3. $\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}$

1-4. $\frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x}$

1-5. $\mathrm{L}(x+\sqrt{1+x^2})$

1-6. $\operatorname{arc\,tg}\frac{a-x}{a+x}$

1-7. $\operatorname{Log}\cos x$

1-8. $\operatorname{Log}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

1-9. $\sqrt[3]{1+x}$

1-10. $\frac{1}{\cos x}$

1-11. $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$

1-12. $\frac{1+3x^2}{(1-x)^3}$

1-13. $\frac{e^x}{1-x}$

1-14. $\operatorname{sen} x \cos 2x$

1-15. $\frac{e^x}{\cos x}$

1-16. $\sqrt{1+e^x}$

1-17. $\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

1-18. $e^{\operatorname{sen} x}$

1-19. $e^x \operatorname{sen} x$

1-20. $\cos^n x$

1-21. $\frac{x}{e^x-1}$

1-22. $\operatorname{Log}\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1-23. xe^{-x}.

Calcular para la serie de Taylor:

1-24. sen 12° partiendo de sen 10° (con 4 decimales exactos)

1-25. cos 29° partiendo de cos 30°

1-26. $\operatorname{Log}\frac{5}{4}$

1-27. $\sqrt[4]{16{,}2}$

1-28. $\sqrt[3]{26}$

1-29. sen 1,5°

1-30. $\sqrt[6]{70}$

1-31. $\frac{1}{100{,}1}$

1-32. tg 31

1-33. $\sqrt{9{,}1}$

1-34. $\sqrt[4]{260}$

1-35. $\sqrt[5]{1{,}3}$

Devolver:

1-36. $\operatorname{tg} x$ según las potencias de $x - 2$

1-37. $\operatorname{Log}(1 + x)$ según las potencias de $x - 1$

1-38. $x^5 - 2x^3 + 4x$ según las potencias de $x + 1$

1-39. $\operatorname{arc\,tg} x$ según las potencias de $x - 3$

1-40. $\dfrac{1}{1-x}$ según las potencias de $1 + x$

1-41. $\dfrac{x+1}{x-2}$ según las potencias de $x - 3$.

CAPITULO II

Expresiones indeterminadas

Calcular el verdadero valor de las siguientes expresiones, para $x = 0$:

2-1. $\dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

2-2. $\dfrac{e^x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

2-3. $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

2-4. x^x

2-5. $\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

2-6. $\dfrac{\sqrt[3]{x + 27} - 3}{\sqrt[4]{x + 16} - 2}$

2-7. $\dfrac{2\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt{4 + x}}{\sqrt{9 + x} - 3}$

2-8. $\dfrac{\operatorname{Log}(1 - \cos x)}{\operatorname{Log} x}$

2-9. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

2-10. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x \cdot \cos x}{x(1 - \cos x)}$

2-11. $\dfrac{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x}{x(1 - \cos 3x)}$

2-12. $\dfrac{\operatorname{tg} ax - ax}{x^2 \operatorname{tg} ax}$

2-13. $\dfrac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{tg} 2x}$

2-14. $\dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$

2-15. $\dfrac{e^x \operatorname{sen} x - x}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$

2-16. $\dfrac{\operatorname{Log} \cos ax}{\operatorname{Log} \cos bx}$

2-17. $\dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}$

2-18. $\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$

2-19. $(1 + a \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$

2-20. $\dfrac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x \cdot \operatorname{arc\,tg} x}$

2-21. $\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Verdadero valor de:

2-22. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}{1 + \operatorname{sen} px - \cos px}$ para $x = 0$

2-23. $\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$ para $x = 0$

2-24. $\dfrac{a\sqrt{ax} - x^2}{a - \sqrt{ax}}$ para $x = a$

2-25. $\dfrac{a^{\operatorname{Log} x} - x}{\operatorname{Log} x}$ para $x = 1$

2-26. $\dfrac{\cos ax - \cos an}{n^2 - x^2}$ para $x = n$

2-27. $\dfrac{e^{mx} - e^{ma}}{(x - a)^n}$ para $x = a$

2-28. $(\cos x)^{\cos x}$ para $x = \dfrac{\pi}{2}$

2-29. $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ para $x = \dfrac{\pi}{4}$

2-30. $\dfrac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{sen}^2 x}$ para $x = 0$

2-31. $a \operatorname{sen} \dfrac{30^\circ}{a}$ para $a = \infty$

2-32. $\dfrac{a^{2x} - b^{2x}}{2x}$ para $x = 0$

2-33. $\dfrac{\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^2}{2 \operatorname{sen} x - 1}$ para $x = \dfrac{\pi}{6}$

2-34. $\dfrac{\operatorname{Log} \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{(x - \pi)^2}$ para $x = \pi$

2-35. $(1 + a \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$ para $x = 0$

2-36. $e^{-ax} \operatorname{Log} bx$ para $x = \infty$

2-37. $\left(\dfrac{1}{x - 1}\right)^{\operatorname{Log} x}$ para $x = 1$

2-38. $(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ para $x = \infty$

2-39. $\dfrac{\operatorname{Log} (x - \pi)}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2}}$ para $x = \pi$

2-40. $x^{\frac{1}{\operatorname{Log} 3x}}$ para $x = 0$.

Encontrar el verdadero valor de las expresiones siguientes, para $x = \infty$:

2-41. $x \cdot \operatorname{Log} \dfrac{1 + x}{x}$

2-42. $\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$

2-43. $\dfrac{\operatorname{Log} (1 + e^x)}{x}$

2-44. $\dfrac{x^m}{e^x}$

2-45. $x \operatorname{Log} x$

2-46. $\sqrt[3]{x^3 + ax^2} - \sqrt[3]{x^3 - ax^2}$

2-47. $\dfrac{\operatorname{Log} (x + 1)^3}{6x}$

2-48. $\dfrac{e^x}{x^3}$

2-49. $\dfrac{4^x}{x^4}$

2-50. $(\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{x}}$

2-51. $x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$

2-52. $2^x \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^x}$

Encontrar el verdadero valor de las expresiones siguientes, para $x = 1$.

2-53. $\dfrac{1 - x^n}{\operatorname{Log} x}$

2-54. $(2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$

2-55. $\dfrac{2}{1 - x^2} - \dfrac{3}{1 - x^3}$

2-56. $x^{\frac{1}{1 - x}}$

2-57. $\dfrac{1}{\operatorname{Log} x} \cdot \cos \dfrac{\pi x}{2}$

2-58. $\dfrac{\operatorname{Log} x}{x^n - 1}$

2-59. $(x - 1) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$

2-60. $\dfrac{\operatorname{sen} ax - a \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} ax - a \operatorname{tg} x}$

2-61. $\dfrac{\operatorname{Log} \operatorname{sen} \pi \dfrac{x}{2}}{(x - 1)^2}$

2-62. $\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\operatorname{Log} x}$

2-63. $\dfrac{\cos nx - \cos x}{1 - n^2}$.

Encontrar el verdadero valor, para $x = \infty$, o para $n = \infty$, de:

2-64. $\dfrac{1 - \cos \dfrac{x}{n}}{n^2}$

2-65. $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$

2-66. $\sqrt[x]{\operatorname{Log} x}$

2-67. $\dfrac{\operatorname{tg} \dfrac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{sen} \dfrac{x}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$

2-68. $(\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{x}}$

2-69. $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$

2-70. $x - \sqrt{x^2 - 1}$

2-71. $\left(\cos \dfrac{2}{x}\right)^{x^2}$

2-72. $\left(\cos \sqrt{\dfrac{2a}{x}}\right)^x$.

2-73. Encontrar el verdadero valor, para $x = \dfrac{\pi}{4}$, de $y = (\operatorname{tg} x)^{x - \frac{\pi}{4}}$

2-74. Encontrar el verdadero valor de $(3 - x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{6}$ para $x = 3$.

2-75. Encontrar el verdadero valor de $4\pi \operatorname{tg} 2x - \dfrac{\pi}{\cos 2x}$ para $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Encontrar el verdadero valor, para $x = \dfrac{\pi}{2}$ de:

2-76. $\dfrac{\sqrt{1 + 2\cos x} - 1}{x - \dfrac{\pi}{2}}$

2-77. $\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$

2-78. $\left(\dfrac{\pi}{x} - 1\right)^{\operatorname{tg} x}$.

Verdadero valor, para $x = a$, de:

2-79. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2}$

2-80. $\dfrac{a - x - a \operatorname{Log} a + a \operatorname{Log} x}{a - \sqrt{2ax - x^2}}$

2-81. $\dfrac{\operatorname{Log} x^p - \operatorname{Log} a^p}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}$.

CAPITULO III

Estudio de las series

En qué casos, las series siguientes son convergentes o divergentes:

3-1. $\dfrac{x^n}{n + \sqrt{n}}$

3-2. $\dfrac{1}{a + x^n}$

3-3. $\operatorname{sen}\left(n + \dfrac{a}{n}\right)\pi$

3-4. $\dfrac{a}{b + cn}$

3-5. $\dfrac{n + 2}{n^3 + 1}$

3-6. $\dfrac{n^2}{n!}$

3-7. $\dfrac{n}{2^n}$

3-8. $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n + 1}}$

3-9. $n(n + 1)x^n$

3-10. $\dfrac{1}{n^{1/2}}$

3-11. $\dfrac{n}{1 + a^n}$

3-12. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$

3-13. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{\sqrt{n}} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$

3-14. $\dfrac{x^n}{n^{n+1}}$

3-15. n^2x^n

3-16. $\dfrac{1}{5 + n}$

3-17. $\dfrac{1}{n(\operatorname{Log} n)^3}$

3-18. $\dfrac{a^n}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$

3-19. $\dfrac{(2n + 1)x^{n-1}}{2n - 1}$

3-20. Calcular la suma de la serie:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n + 1)} + \ldots$$

3-21. Demostrar que la serie siguiente es convergente y calcular su suma:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n2^n} + \ldots$$

3-22. La serie siguiente, ¿es convergente? Calcular su intervalo de convergencia y calcular su suma con una aproximación de $\dfrac{1}{1000}$:

$$\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{x^n}{(n - 1)n} + \ldots$$

Estudiar las series siguientes:

3-23. $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

3-24. $\dfrac{1}{1+x^n} \quad (x > 0)$

3-25. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$

3-26. nx^{n-1}

3-27. $\dfrac{1+n^2}{n!}$

3-28. $\dfrac{n}{1+x^n}$

3-29. $\dfrac{n!}{n^n}$

3-30. $\dfrac{x^n}{n^{n+1}}$

3-31. $\dfrac{1}{n} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$

3-32. $\dfrac{1}{x^n + \dfrac{1}{x^n}}$

3-33. $\dfrac{x^n}{(n-2)(n-1)n}$

3-34. $e^{-\frac{n^2+1}{n+1}}$

3-35. $x^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

3-36. $(\operatorname{Log} n)^{-n}$

3-37. $(-1)^{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n}$

3-38. $\dfrac{n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}$.

Calcular, por medio de una serie, con la aproximación de 10^{-5}:

3-39. e^2, $\sqrt[4]{e}$, $\sqrt{e}$, $\sqrt[5]{e}$ y $\sqrt[6]{e}$.

Calcular con una aproximación $\dfrac{1}{1000}$, las series:

3-40. $1 + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dfrac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \ldots$

3-41. $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^n} + \ldots$

3-42. $\dfrac{1^2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{3^2}{3!} + \ldots + \dfrac{n^2}{n!} + \ldots$

Estudiar la convergencia de las series siguientes:

3-43. $\operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

3-44. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \ldots + \dfrac{n}{3^n} + \ldots$ (por la regla de Cauchy).

3-45. $\dfrac{n^3}{(n+1)!}$

3-46. $\dfrac{n(n+1)}{(n+2)^3}$

Encontrar la región de convergencia de las series siguientes:

3-47. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2^2} + \dfrac{x^2}{2^3} + \ldots + \dfrac{x^{n+1}}{2^n} + \ldots$

3-48. $\dfrac{x}{2^2} + \dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{x^3}{6^2} + \ldots + \dfrac{x^n}{(2n)^2} + \ldots$

3-49. $\dfrac{x}{1\cdot 3} + \dfrac{x^2}{2\cdot 3^2} + \ldots + \dfrac{x^n}{n\cdot 3^n} + \ldots$

3-50. $\dfrac{x-3}{1\cdot 2} + \dfrac{(x-3)^2}{3\cdot 2^2} + \ldots + \dfrac{(x-3)^n}{(2n-1)2^n}$

3-51. $\dfrac{(n+1)x^n}{4^n}$

3-52. $\dfrac{x^n}{n!}$

3-53. $\dfrac{x^n}{2^n\cdot n^2}$

3-54. $\dfrac{(n^2-1)x^n}{n^3+2}$

3-55. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$

3-56. $1 + x + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{3^2} + \ldots$

3-57. $2x + \dfrac{3x^2}{2!} + \dfrac{4x^3}{3!} + \dfrac{(n+1)x^n}{n!} + \ldots$

3-58. $1 + \dfrac{x}{2\cdot 1} + \dfrac{x^2}{2^2\cdot 2} + \dfrac{x^3}{2^3\cdot 3} + \dfrac{x^4}{2^4\cdot 4} + \ldots$

Estudiar las series siguientes:

3-59. $\left[\operatorname{tg}\left(a + \dfrac{\alpha}{n}\right)\right]^n$ (por la regla de Cauchy)

3-60. $\left[\operatorname{sen}\left(a + \dfrac{\alpha}{n}\right)\right]^n$ » »

3-61. $\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$

3-62. $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\operatorname{Log} n)^{\beta}}$ (α y β cualesquiera)

CAPITULO IV y V

Cálculo de los complejos

4-1. Calcular $(5 - 8j)(2 - 5j)(2 - 3j)$ y poner el resultado por la forma $a + jb$.

4-2. Calcular $\dfrac{50 + 9j}{5 - 8j} = a + jb$.

4-3. Calcular $\dfrac{18 + 13j}{(2 + 3j)(5 - 6j)} = a + jb$.

4-4. Calcular $\sqrt{21 - 16j} = a + jb$.

4-5. Poner $-7 + 5j$ con la forma $r(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi)$.
Igualmente para $-8 - 11j$.

4-6. Poner $(-7 + 5j)$ y $(-8 - 11j)$ mediante la forma $re^{j\varphi}$.

4-7. Poner las expresiones siguientes por la forma $a + jb$:

$$10e^{20j}, \quad 5e^{-40j}, \quad 2e^{400j}, \quad 3e^{-17j}.$$

Poner las expresiones siguientes con la forma $a + jb$:

4-8. $(5 + 4j)(3 + 27j)(2 - 3j)$

4-9. $(7 - 2j)(5j - 3)(8 + 3j)$

4-10. $\dfrac{(2 - 3j)(3 + 2j)}{4 - 3j}$

4-11. $\dfrac{5 - 6j}{(2 + 3j)(3 - 5j)}$

4-12. $\dfrac{(7j - 5)(5 - 2j)}{(8 + 5j)(3 - 7j)}$

4-13. $\dfrac{(2j - 7)(3 + 10j)}{(8 - j)(4 + 3j)}$.

Calcular la raíz cuadrada y el cuadrado de las expresiones siguientes y poner cada una de ellas con la forma $a + jb$:

4-14. $15 + 7j$

4-15. $9 + 13j$

4-16. $12 - 19j$

4-17. $15 - 8j$

4-18. $-8 + 13j$

4-19. $-14 - 19j$

4-20. $-18 + 11j$

4-21. $-21 - 16j$.

Poner lase ˣpresiones siguientes con la forma $r(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi)$:

4-22. $8 + 3j$

4-23. $18 + 11j$

4-24. $11 - 15j$

4-25. $9 - 8j$

4-26. $-7 + 5j$

4-27. $-10 + 17j$

4-28. $-14 - 9j$

4-29. $-12 - 17j$.

4-30. El mismo problema para $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{j}{\sqrt{2}}$, y después simplificar.

El mismo problema para:

4-31. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{j}{\sqrt{2}}\right)^4$

4-32. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{j}{\sqrt{2}}\right)^{-3}$

4-33. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{j}{\sqrt{2}}\right)^{2/3}$.

4-34. Simplificar: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{j}{\sqrt{2}}\right)^{10} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{j}{\sqrt{2}}\right)^{10}$

4-35. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{j}{\sqrt{2}}\right)^6 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{j}{\sqrt{2}}\right)^6$.

4-36. Simplificar: $(1 + j\sqrt{3})^5 + (1 - j\sqrt{3})^5$.

Poner las expresiones siguientes mediante la forma $a + jb$:

4-37. $(5j - 7)^{2/3}$

4-38. $(7 + 10j)^{2/5}$

4-39. $(8 - 5j)^{1/4}$

4-40. $(-6 - 13j)^{1/3}$

4-41. $\dfrac{(5 - 7j)^{4/5}}{(2 + 7j)^{1/3}(3j - 4)^{1/2}}$

4-42. $\dfrac{1}{(2 - 3j)^4}$

4-43. $\sqrt{\dfrac{5 + 6j}{8 - 3j}}$

4-44. $\dfrac{(5 - 4j)^{1/2}}{(2 - 5j)^{1/3}}$

4-45. $\dfrac{(2 + 5j)^{1/2}(-4 - 9j)^{2/3}}{(8j - 3)^{4/5}}$.

Si hacemos $x = \cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi$, tenemos inmediatamente:

$$\frac{1}{x} = \cos\varphi - j \operatorname{sen}\varphi,$$

se deduce:

$$2\cos\varphi = x + \frac{1}{x}$$

$$2j \operatorname{sen}\varphi = x - \frac{1}{x}.$$

Se pueden, por tanto, aplicar estas dos fórmulas para calcular $\cos^m \varphi$ y $\operatorname{sen}^m \varphi$ aplicando $\left(x + \frac{1}{x}\right)^m$ y $\left(x - \frac{1}{x}\right)^m$.

Aplicar este método para calcular:

4-46. $\operatorname{sen}^5 \varphi$

4-47. $\cos^4 \varphi$

4-48. $\operatorname{sen}^6 \varphi$

4-49. $\cos^6 \varphi$

4-50. $\operatorname{sen}^6 \varphi \cdot \cos^4 \varphi$

4-51. $\operatorname{sen}^4 \varphi \cdot \cos^2 \varphi$

4-52. $\operatorname{sen}^3 \varphi \cdot \cos^3 \varphi$.

Calcular las expresiones siguientes:

4-53. $10\angle 5 \cdot 20\angle -10$

4-54. $\dfrac{10\angle 5}{20\angle 10}$

4-55. $\dfrac{2\angle 3 \cdot 4\angle -6}{7\angle -4}$

4-56. $\dfrac{10\angle -5 \cdot 4\angle 30}{6\angle -50 \cdot 7\angle 5}$

4-57. $(2\angle -10)^3 \cdot 4\angle -20$

4-58. $(3\angle -20)^2 \cdot (10\angle 50)^3$

4-59. $\sqrt{49\angle -18 \cdot 25\angle 40}$

4-60. $\dfrac{(1 - 4j)^2}{(1 - 3j)^3} = a + jb$

4-61. $\dfrac{(10\angle 2 \cdot 5\angle -4)^3}{\sqrt{64\angle 28}}$

4-62. $\dfrac{20\angle 10 \cdot \sqrt{50\angle 50 \cdot 2\angle -4}}{5\angle -20}$

4-63. $(2\angle -4)^6 \cdot 2\angle 4$

4-64. $\sqrt{625\angle -10 \cdot (5\angle 10)^3}$

4-65. $2\angle -10 + 4\angle 20$

4-66. $\dfrac{(2 - 10j) \cdot 5\angle 20}{1 + 4j}$

4-67. $\dfrac{4\angle 10 \cdot 5\angle -4 \cdot 6\angle -40}{8\angle -16 \cdot 18\angle -10 \cdot 50\angle 28}$.

Poner la forma $a + jb$, la expresión siguiente:

4-68. $\dfrac{1}{1 - j} + \dfrac{1}{a - j} + \dfrac{1}{1 - ja}$.

Calcular todas las raíces de las ecuaciones siguientes:

4-69. $x^4 - 2 = 0$

4-70. $x^4 - 2x^3 = 3$

4-71. $x^6 + 1 = 0$

4-72. $x^3 + 8 = 0$

CAPITULOS VI, VII y VIII

Infinitésimos y cálculo de diferenciales

Calcular el orden y la parte principal de los infinitésimos:

6-1. $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$

6-2. $\sqrt{x} - \sqrt{\operatorname{sen} x}$

6-3. $2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x - x^3$

6-4. $\operatorname{Log}(1 + x) - \dfrac{2x}{x + 2}$

6-5. $e^x - \dfrac{2 + x}{2 - x}$

6-6. $1 + \operatorname{Log}(1 + x) - \cos x + x - 2 \operatorname{sen} x$

6-7. $1 - \cos x - \dfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$

6-8. $a^x - 1$

6-9. $\sqrt{1 + x} - 1$

6-10. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$

6-11. $x^x - (\operatorname{sen} x)^x$

6-12. $\operatorname{tg} x - \sqrt{x}$

6-13. $x \cos x - \operatorname{Log}(1 + x)$

6-14. $\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x$

6-15. $x - \dfrac{4}{15} \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{15} \operatorname{tg} x - \dfrac{8}{5} tg \dfrac{x}{2}$.

Calcular las diferenciales de:

6-16. $\dfrac{a + x}{(b + x)^n}$

6-17. $(x^2 - 1)e^{x^2}$

6-18. $\sqrt{\dfrac{x - a}{x - b}}$

6-19. $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

6-20. $\operatorname{Log}\left(\dfrac{x + a}{x - a}\right)$

6-21. $\operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)$

6-22. $x^{\cos x}$

6-23. $\cos x\,(\operatorname{sen}^2 x + 2)$

6-24. $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{x + a}{1 - xa}$

6-25. $\sqrt[3]{x^2 + a}$

6-26. $\operatorname{Log}(\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2})$

6-27. $x \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{1}{2} \operatorname{Log}(1 + x^2)$

6-28. $y = \dfrac{2x^3(x - 1)^2}{\sqrt{x + 1}}$

6-29. $y = \operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{b + a \cos x}{a + b \cos x}\right)$

6-30. $y = a^{x^b}$

6-31. $y = x^{\frac{1}{x}}$

6-32. $y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$

6-33. $y = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{ax}$

6-34. $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{Log} x}$

6-35. $y = \operatorname{sen} \sqrt{a^2 - x^2}$

6-36. $y = \operatorname{Log} (\operatorname{sen}^n x)$

6-37. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x\sqrt{3}}{x+2}$

6-38. $y = \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{a} \right)$

6-39. $y = a^{x^n}$

6-40. $y = \operatorname{Log} \dfrac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a+bx}}$

6-41. $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

6-42. $y = \operatorname{ar\,cos}\, e^{\sqrt{x}}$

6-43. $y = \sqrt[4]{\dfrac{e^x + e^{-x}}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$

6-44. $y = \operatorname{Log} \operatorname{arc\,sen} \left(\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right)$

6-45. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

6-46. $y = e^{\operatorname{sen}^2 x}$

6-47. $y = \sqrt{a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x}$

6-48. $y = \sqrt{\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}$

6-49. $y = \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x$

6-50. $y = \dfrac{e^{x^2}}{x}$

6-51. $y = x \cdot \operatorname{arc\,sen} x$

6-52. $y = \operatorname{Log} \dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)-x}}$

6-53. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1x}{1-x^2}$

6-54. $y = \operatorname{arc\,sen} (\cos x)$

6-55. $y = \dfrac{5}{\sqrt[3]{3x^2 - 2x}}$

6-56. $y = \sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1+3x}$

6-57. $y = \dfrac{\sqrt{3x^2+5}}{1-x}$

6-58. $y = (2x-1)\sqrt{2x-x^2}$

6-59. $y = \operatorname{Log} (x^3 - 3x^2 + 6x)^{1/3}$

6-60. $y = \operatorname{Log} \sqrt{x^2+4} \cdot \sqrt[3]{x^3+2x}$

6-61. $y = \operatorname{Log}^4 \left(2x^3 - \dfrac{1}{x^2} \right)$

6-62. $y = e^{\frac{\sqrt{1-x}}{x}}$

6-63. $y = e^{\operatorname{Log}^2 x}$

6-64. $y = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

6-65. $y = 7^{-\frac{1}{x}}$

6-66. $y = (1-x^2)^{\sqrt{1-x}}$

6-67. $y = \operatorname{sen} \left(x^2 + \dfrac{1}{x} \right)$

6-68. $y = 2 \operatorname{sen}^4 (e^{-3x})$

6-69. $y = \operatorname{sen}^2 \dfrac{2}{x} \cdot tg^3 \dfrac{x}{2}$

6-70. $y = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{1}{\sqrt{-x^2}}$

6-71. $y = \operatorname{arc\,sen} e^x$

6-72. $y = x \cdot \operatorname{arc\,sen} (\cos 2x)$

6-73. $y = \operatorname{Log} \operatorname{arc\,tg} 2x^3$

6-74. $y = \dfrac{1 + e^{\frac{x}{2}}}{1 - e^{\frac{x}{2}}}$

6-75. $y = \sqrt{1 - x} \cdot \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x} - \sqrt{x}$

6-76. $y = \operatorname{arc\,tg} x^x$

6-77. $y = \operatorname{Log} (e^{2x} + a^{3x})^2$.

Problemas sobre diferenciales:

7-1. Una barra de metal de 10 m de larga está doblada en forma de rectángulo, cuyo lado es igual a x. ¿Cuándo un incremento de x dará un incremento de la superficie del rectángulo?

7-2. Un rectángulo de base x está inscrito en un triángulo isósceles de 50 cm de altura y 100 cm de base. Calcular la variación de la superficie del rectángulo si x aumenta en dx.

7-3. Una piedra lanzada en un lago produce ondas concéntricas. Si el radio de la onda crece a la velocidad de 5 m por segundo, ¿a qué velocidad crece la superficie circular de esta onda, cuando R = 12 m?

7-4. La altura de un cilindro variable es constantemente igual a su diámetro. Cuando $h = 10$ m y crece a razón de 2 m por segundo, ¿a qué velocidad crece el volumen en este momento?

7-5. El vértice de una escalera de longitud l se desliza a lo largo de un muro vertical, que reposa en un suelo horizontal. Si la velocidad del vértice de la escalera es V_0, ¿a qué velocidad se desliza el pie de la escalera?

7-6. Un depósito cónico invertido, tiene 10 cm de diámetro y 10 cm de profundidad, y recibe 4 cm^3 de agua por minuto. ¿A qué velocidad sube el nivel del agua cuando la altura de agua alcanza 6 cm?

7-7. ¿A qué velocidad crece la superficie de un triángulo equilátero de 6 cm de lado, si cada lado crece en $\sqrt{3}$ cm por minuto?

7-8. El radio de una esfera es 10 cm y crece a la velocidad de 1 cm por segundo. ¿A qué velocidad crece el volumen de la esfera en este momento?

7-9. La longitud y la anchura de una placa metálica calentada crecen a la velocidad de 0,1 % por grado. ¿Cuál es la variación relativa por grado de la superficie?

7-10. Un tren corre a 50 km/h y un globo se eleva a la velocidad de 10 km/h. Parten ambos del mismo punto. ¿A qué velocidad se separan?

7-11. ¿A qué velocidad crece la superficie de un cuadrado de 10 m de lado cuando este lado aumenta a la velocidad de 1 cm por segundo?

7-12. ¿En qué punto del primer cuadrante, el arco crece dos veces más rápido que la ordenada?

7-13. Los dos lados de un triángulo crecen a razón de 1 cm por segundo y el ángulo comprendido entre ellos, a razón de 1/10 radianes por segundo. ¿A qué velocidad varía la superficie en el momento en que los tres lados miden 20 cm de longitud?

7-14. En la función $y = 2x^3 + 6$, ¿cuál es el valor de x en el punto en que y crece 24 veces más rápidamente que x?

7-15. En un hexágono regular de lado igual a 1 m, los lados crecen a la velocidad de 2 cm por segundo. ¿A qué velocidad crece la superficie?

7-16. Un cilindro está cubierto por una semiesfera. Si el radio de la base crece a razón de 1 m por minuto y la altura del cilindro a razón de 2 m por minuto, ¿a qué velocidad crece el volumen cuando $R = 10$ m y $H = 20$ m?

7-17. Un cono circular debe conservar un volumen constante. Si el radio de la base crece 5 cm por segundo, ¿cómo varía la altura en el momento en que es igual a 15 cm y en que el radio $R = 10$ cm?

7-18. En un gas se tiene $PV^{1.4} = K$. Si en un momento dado el volumen es 10 m^3 y la presión 100 barias, ¿cómo varía la presión si el volumen decrece en 1 m^3 por minuto?

7-19. Una resistencia eléctrica $R = 100$ ohmios está recorrida por una corriente $I = 1$ A. Si I varía en 10 mA, calcular la variación dP de la potencia eléctrica absorbida.

7-20. Un generador eléctrico de f.e.m. $E = 100$ voltios y una resistencia interna $r = 10$ ohmios está conectado sobre una resistencia exterior $R = 40$ ohmios.

Si R varía en $dR = 2$ ohmios, calcular:

a) La variación dI de la corriente I.

b) La variación dV de la d.d.p. en bornes de R.

c) La variación dP de la potencia eléctrica en R.

7-21. Un condensador eléctrico $C = \dfrac{S}{4\pi e}$, en el que tenemos: $S = 10.000$ cm^2 y $e = 1$ mm está conectado en permanencia sobre una diferencia de potencial $V = 1.000$ voltios, continua y constante. Si e varía en 1/10 mm, calcular:

a) la variación dC de la capacidad,

b) al variación dP de la energía almacenada (se supone que e crece).

7-22. La inductancia de una bobina es, en henrios:

$$L = \frac{4\pi N^2 S}{l \cdot 10^9}, \qquad (S \text{ en } cm^2,\ l \text{ en cm})$$

calcular, en microhenrios, la variación dL, si l aumenta en 1 cm, con los valores siguientes:

$$N = 1.000 \qquad S = 1.000 \qquad l = 50 \text{ cm}.$$

7-23. La impedancia de una bobina, en corriente alterna es

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \qquad (\omega = 2\pi f).$$

Tenemos: $R = 10.000$ ohmios, $L = 30$ H, $f = 50$ Hz.

Si f varía en $df = 2$ hertz, calcular en ohmios la variación dZ de la impedancia.

7-24. La impedancia de un condensador, en corriente alterna, es:

$$Z = \frac{1}{C\omega} \qquad \begin{pmatrix} C \text{ en faradios} \\ Z \text{ en ohmios} \end{pmatrix}$$

Tenemos: $C = 10\,\mu f$, $f = 50$, y $df = 2$. Calcular la variación dZ de la impedancia.

7-25. El período T de un circuito oscilante en radio es, en segundos:

$$T = 2\pi\sqrt{L \cdot C} \qquad \begin{pmatrix} L \text{ en henrios} \\ C \text{ en faradios} \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$L = 1.000\,\mu H, \qquad C = \frac{1}{1.000}\,\mu F.$$

Si C varía en 10 picofaradios, calcular la variación dT del período (1 picofaradio $= 10^{-12}$ faradios). Expresar dT en microsegundos.

7-26. En una bobina, con resistencia, el desfase de la corriente sobre la tensión, en alterna, viene dado por $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{L\omega}{R}$. Tenemos $L = 100$ H, $R = 200$ ohmios, $f = 50$.

a) Si f varía en $df = 2$, calcular: $d(\operatorname{tg}\varphi)$.

b) Si R varía en $dR = 5$ ohmios, calcular: $d(\operatorname{tg}\varphi)$.

7-27. Un móvil tiene una masa de 100 Kg. Su velocidad es de 10 m/s. Si su velocidad varía en $dv = 1/2$ m/s, calcular la variación dW de su energía cinética.

Calcular la diferencial logarítmica de:

8-1. $y = \dfrac{(x-1)^{5/2}(x-3)^{13/2}}{(x-2)^8}$

8-2. $y = x^2\sqrt{x^2+3}$

8-3. $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)(2x+3)}{x}}$

8-4. $y = \dfrac{x\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}$

8-5. $y = x^{\operatorname{Log} x}$

8-6. $y = \left(\dfrac{2}{x}\right)^x$

8-7. $y = x^n e^{nx} \operatorname{sen}^m x$

8-8. $y = \dfrac{x^3\sqrt{1+\operatorname{Log} x}}{(1+x)^4}$

8-9. $y = x^{\sqrt{x}}$

8-10. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

8-11. $y = \dfrac{4x^2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{4+x^2}}$

8-12. $y = x^2 \sqrt[3]{x^2+4}\sqrt{x^2-4}$

8-13. $y = (1+2e^x)^{\sqrt{1+x^2}}$

8-14. $y = (\operatorname{sen}^2 2x)^{\cos 3x}$

8-15. $y = (x+1)x^{1/x}$

8-16. $y = \dfrac{2x\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x}}$

8-17. $y = (\operatorname{tg}^2 x^2)^{\operatorname{Log} x}$

8-18. $y = \left(\operatorname{arc}\cos^2 \dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen}^2 x}$.

Calcular la diferencial dy de las funciones implícitas siguientes:

8-19. $x^2 - 4xy + -1 = 0$

8-20. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

8-21. $\operatorname{sen} y - n \operatorname{sen} x = 0$

8-22. $\operatorname{Log}\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$

8-23. $x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = 0$

8-24. $x^2 \operatorname{Log} y - y^2 \operatorname{Log} x = 0$

8-25. $\operatorname{tg}(x^2+y^2) = x^2 - y^2$

8-26. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

8-27. $\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 y = 0$

8-28. $e^{x+y} + e^{x-y} = 0$

8-29. $\operatorname{sen}\dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{x}{y} = 0$

8-30. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y} = 2$

8-31. $e^{\frac{x}{y}} - \dfrac{x}{y} = 1$

8-32. $\sqrt{1-x} - \sqrt{1-y} = 1$

8-33. $\dfrac{\operatorname{Log}\sqrt{x} - \operatorname{Log}\sqrt{y}}{x-y} = 2$

8-34. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} = 1$

8-25. $\operatorname{Log}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y} = 1.$

CAPITULO VIII (segunda parte)

CAPITULOS IX y X

Diferenciales de orden superior

Otras diferenciales

Calcular la diferencial de orden n de las funciones siguientes:

9-1. $x^2 \operatorname{Log} x$

9-2. $(1 - \cos x)\cos x$

9-3. $\dfrac{x}{a^2 - b^2x}$

9-4. $\operatorname{Log} x$

9-5. $\cos^2 x$

9-6. $\dfrac{1+x}{1-x}$

9-7. $(ax + b)e^x$

9-8. $\operatorname{Log}\dfrac{a+bx}{a-bx}$

9-9. $\dfrac{1}{x^2}$

9-10. xe^x

9-11. $\operatorname{sen} ax$

9-12. $\cos ax$

9-13. $e^x \cdot \operatorname{sen} x$

9-14. $e^{ax} \cdot \cos bx$

Calcular d^2y de las funciones siguientes:

9-15. $y = (ax^2+bx+c)^3$

9-16. $y = x(\operatorname{Log} x)^2$

9-17. $y = \dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$

9-18. $y = \sqrt{1 - 4x2}$

9-19. $y = 4xe^{-x^2}$

9-20. $y = 3\operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$

9-21. $y = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

9-22. $y = x \cdot \cos x$

9-23. $y = x \operatorname{arc\ sen} x$

9-24. $y = x^2e^{-x}$.

Verificar que las diferenciales segundas de las funciones siguientes están bien dadas por las fórmulas indicadas:

9-25. $y = \operatorname{sen}^2 x$ $\qquad d^2y = 2\cos 2x dx^2$

9-26. $y = x^2 \operatorname{sen} x$ $\qquad d^2y = [4x\cos x - (x^2 - 2)\operatorname{sen} x]dx^2$

9-27. $y = \operatorname{sen}^3 x \cos x$ $\qquad d^2y = 64\operatorname{sen}^4 x - 60\operatorname{sen}^2 x + 6)dx^2$

9-28. $y = \operatorname{arc\ sen} x$ $\qquad d^2y = \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}dx^2$

Calcular las diferenciales terceras:

9-29. $y = \text{tg}^2 3x$

9-30. $y = (5x^4 - 2x^2 + 1)^4$

9-31. $y = \dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$

9-32. $y = \text{Log}\dfrac{1}{x}$

9-33. $y = e^{\text{sen } x}$

9-34. $y = \text{arc tg } e^x$

9-35. $y = \sqrt{1 - 4x^2}$

9-36. $y = \cos^2 x^3$

9-37. $y = \dfrac{1}{\text{Log}\dfrac{1}{x}}$.

Calcular la diferencial segunda d^2y de las funciones implícitas siguientes:

9-38. $y^3 - xy - 1 = 0$

9-39. $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 1$

9-40. $e^x + e^y = e^{xy}$

9-41. $\text{Log}(x^2 + y^2) = \text{arc tg}\dfrac{y}{x}$

9-42. $x^2 + (y + 4)^2 = 16$

9-43. $\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = 2$

9-44. $e^x + e^y = 4$

9-45. $\text{sen } x + \cos y = 1$

9-46. $e^{xy} - x = 0$

9-47. $\sqrt{x + y} = e^x$

9-48. $ye^x = x + y$.

Calcular la diferencial segunda d^2y de las funciones paramétricas siguientes:

9-49. $\begin{cases} x = 2\theta + 1 \\ y = \dfrac{\theta^3}{3} \end{cases}$

9-50. $\begin{cases} x = 3\theta \\ y = \dfrac{3}{\theta} \end{cases}$

9-51. $\begin{cases} x = \text{Log}\,\theta \\ y = \dfrac{1}{\theta} \end{cases}$

9-52. $\begin{cases} x = e^t \text{ sen } t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$

9-53. $\begin{cases} x = a \cos\theta \\ y = b \text{ sen } \theta \end{cases}$

9-54. $\begin{cases} x = \text{sen } 2\theta \\ y = \text{sen}^2\,\theta \end{cases}$

9-55. $\begin{cases} x = a \cos^3\theta \\ y = a \text{ sen}^3\,\theta \end{cases}$

9-56. $\begin{cases} x = 6 \cos\theta \\ y = 3 \text{ sen}^2\,\theta. \end{cases}$

Calcular $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ de las funciones siguientes:

9-57. $b^2x^2 + a^2x^2 = a^2b^2$

9-58. $x^2 - 2y^2 = 9$

9-59. $x^2 + y^2 = 4y$

9-60. Demostrar que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ en todos los puntos de la curva:

$$x = 3\,\text{sen}^2\,\theta, \qquad y = 6\cos^2\theta.$$

9-61. Demostrar que en todos los puntos de la curva:

$$x = \text{Log}\,\theta, \qquad y = \theta + 4$$

los valores de $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ son iguales.

9-62. Encontrar las coordenadas del máximo o mínimo de la curva:

$$x = \frac{4}{\text{tg}\,\theta}, \qquad y = 4\,\text{sen}^2\,\theta.$$

9-63. Si $y = 3e^{-4}\,\text{sen}\,3t$, demostrar que:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 10y = 0.$$

9-64. Si $y = e^{\text{sen}\,x}$, demostrar que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cos x + y\,\text{sen}\,x = 0.$$

9-65. Si $y = a(1 - \cos\theta)$ y $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$, calcular $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{d^2x}$ en función de θ.

9-66. Si $y = x \cdot e^x$, calcular $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ y deducir $\dfrac{d^ny}{dy^n}$.

Respuesta: $(x + n)e^x$.

9-67. Calcular las diferenciales cuarta y quinta de:

$$y = \text{tg}\,x \quad \text{y de} \quad y = \frac{1}{\text{tg}\,x}.$$

9-68. Verificar que la diferencial cuarta de $y = x^3\,\text{Log}\dfrac{x}{a}$ es igual a $\dfrac{6a}{x}dx^4$.

Calcular la longitud dl de un arco de las curvas siguientes:

10-1. $y = \text{Log}\,x$

10-2. $y = \dfrac{4x}{1 + x^2}$

10-3. $x^2 - y^2 = 7$

10-4. $y = \sqrt{5x + 4}$

10-5. $y = \text{arc tg}\,x$

10-6. $y = \dfrac{1}{\text{tg}\,x}$

10-7. Mostrar que si $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, debemos tener:

$$\frac{dl}{dx} = y.$$

Calcular *directamente* la diferencial de las funciones compuestas siguientes (por la fórmula del párrafo 84):

10-8. $y = \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x \cdot \operatorname{tg} 3x$

10-9. $y = \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$

10-10. $y = \dfrac{\operatorname{Log} x^2}{e^{x^2}}$

10-11. $y = \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^3 2x$

10-12. $y = \dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$

10-13. $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\sqrt{x}}$

10-14. $y = (\sqrt{1 + x})^{\sqrt{1 - x}}$

10-15. $y = xe^{-x} \operatorname{sen} 2x$

10-16. $y = (\operatorname{Log} x)^{\operatorname{Log} x}$

10-17. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

10-18. $y = (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x)^{\frac{1}{x}}$

10-19. $y = (\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})^{-x}$.

CAPITULO XI

Diferenciales de las funciones de varias variables independientes

Calcular las diferenciales parciales de primer orden $\frac{\partial y}{\partial x}$ y $\frac{\partial y}{\partial z}$ de las funciones siguientes:

11-1. $y = \dfrac{x+z}{xz}$

11-2. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+z}{1-xz}$

11-3. $y = \dfrac{xz}{\sqrt{1+x^2+z^2}}$

11-4. $y = e^{xz^2}$

11-5. $y = \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 - x^2})$

11-6. $y = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x-z}{x}$

11-7. $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{\dfrac{x}{z}}}$

11-8. $y = \operatorname{Log} \dfrac{x}{z}$

11-9. $y = \operatorname{sen}^2 \dfrac{z}{x}$

11-10. $y = az^2 + bxz + cx^2$

11-11. $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+z}}$

11-12. $y = e^{2x} \cdot \operatorname{sen} 3z$

11-13. $y = \dfrac{1}{x^2 - z^2}$

11-14. $y = \operatorname{tg} \dfrac{x}{z}$.

Calcular la diferencial total de las funciones siguientes:

11-15. $y = \dfrac{x+z}{xz}$

11-16. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+z}{1-xz}$

11-17. $y = \dfrac{xz}{\sqrt{1+x^2+z^2}}$

11-18. $y = e^{x^2 z}$

11-19. $y = \dfrac{x}{z} + \sqrt{xz}$

11-20. $y = \operatorname{sen}(x+z) + \cos(x-z)$

11-21. $y = e^{(x^2+z^2)}$

11-22. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - z^2}{x^2 + z^2}}$

11-23. $y = \operatorname{Log}(z^x)$

11-24. $y = \operatorname{Log} \operatorname{sen} \dfrac{x}{z}$

11-25. $y = \dfrac{(x+a)^n}{(z+b)^m}$

11-26. $y = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{z}}{x + z}$

11-27. $y = a^x b^z + \operatorname{sen} xz$

11-28. $y = z \operatorname{sen} x + \cos(x - z)$

11-29. $y = \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{z}$

11-30. $y = \cos \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 - z}}$

11-31. $y = \operatorname{arc\,sen}(\cos x)$.

Calcular las diferenciales parciales de primero y segundo orden. $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ de:

11-32. $y = \operatorname{Log}\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 - z^2}}{x - \sqrt{x^2 - z^2}}\right)$

11-33. $y = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{z^2}}$

11-34. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{z}$

11-35. $y = \operatorname{sen} x \cdot \cos z$

11-36. $y = \dfrac{1}{e^x + e^z}$.

Calcular $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ en las funciones siguientes:

11-37. $y = \dfrac{2xz}{x^3 - z^3}$

11-38. $y = \dfrac{x + z}{\operatorname{sen}(x - z)}$

11-39. $y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\dfrac{x - z}{z}}$

11-40. $y = \operatorname{Log} \dfrac{x}{z}$

11-41. $y = \dfrac{x + z}{x - z}$

11-42. $y = e^x \operatorname{sen} z$

11-43. $y = \dfrac{xz}{x + z}$

11-44. $y = \operatorname{arc\,tg} x^2 z^3$

11-45. $y = \operatorname{tg} e^{xz}$

11-46. $y = \operatorname{sen}^3 \dfrac{1}{xz^2}$

11-47. $y = \sqrt{\dfrac{x}{z}}$

11-48. $y = e^{\frac{x}{z}}$.

Verificar que $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$ para las funciones siguientes:

11-49. $y = xz^2 + 2ze^{\frac{1}{x}}$

11-50. $y = \sqrt{\dfrac{z + x}{z - x}}$

11-51. $y = \operatorname{Log}(x + \sqrt{z^2 + x^2})$

11-52. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + z^2}}{x}$

11-53. $y = e^{\frac{x}{z}}$

11-54. $y = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 3z$

11-55. $y = 6z^3 + 5xz^2 - 4x^3 + 2$

11-56. $y = \sqrt{\dfrac{x}{z}}$

11-57. $y = e^{2x} \cdot \operatorname{sen} 3z$

11-58. $y = \operatorname{Log} \dfrac{x}{z}$

11-59. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1-x}{1-z}$

11-60. $y = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{z}$.

11-61. Si $y = \operatorname{Log} \sqrt{x^2 + z^2}$ verificar que:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0.$$

Idéntico problema para la función $y = Ae^x \cdot \cos z$.

11-62. Si $y = \cos(x + z) + \cos(x - z)$, verificar que:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0.$$

Calcular $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}$, y $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ de las funciones siguientes:

11-63. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{z}$

11-64. $y = \dfrac{1-x}{1-z}$

11-65. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos z}$

11-66. $y = \operatorname{tg}^2 xz^2$

11-67. $y = \operatorname{Log} \dfrac{x^2}{z^2}$

11-68. $y = \sqrt{\dfrac{\operatorname{Log} x}{e^z}}$

11-69. $y = \dfrac{1}{\cos \dfrac{x}{z}}$

11-70. $y = e^x + e^{-z}$

11-71. $y = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 2z}$

11-72. $y = \operatorname{tg} \dfrac{x}{z}$.

11-73. Sea $y = x^p z^q$, calcular:

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial p} \text{ y } \frac{\partial y}{\partial q}$$

11-74. Sea $y = \dfrac{x^2 - 3xz - z^2}{x + z}$

Calcular $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial z}$, y demostrar que:

$$x \frac{\partial y}{\partial x} + z \frac{\partial y}{\partial z} = y.$$

11-75. Sea $y = x^3 - 3x^2z + 4xz^2 - z^3$

Calcular $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ y $\dfrac{d^2 y}{\partial z \partial x}$, y verificar que son iguales.

11-76. Sea $y = x^3z^4$, calcular $\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial z}$ y $\dfrac{d^3 y}{dz^2 dx}$.

Las expresiones siguientes, ¿son diferenciales totales exactas de una función de dos variables x y z?

11-77. $(x^2z + z^2 + 2xz)dx + (x^2 + x)(x + 2z)dz$

11-78. $\operatorname{sen} 2x \cos^2 z\, dx + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2z\, dz$

11-79. $\dfrac{2x(1 - e^z)}{(1 + x^2)^2} dx + \dfrac{e^z}{1 + x^2} dz$

11-80. $\dfrac{(x + 2z)dx + zdz}{(x + z)^2}$

11-81. $(z^3 - 2xz)dx + (3xz^2 - x^2)dz$

11-82. $\dfrac{(z + x)dx + (z - x)dz}{x^2 + z^2}$

11-83. $\left(x + z + \dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{x^2}\right) dx + \left(z + x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{z^2}\right) dz.$

11-84. $\left(z + \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(x + \dfrac{1}{z}\right) dz$

11-85. $(\cos^2 x - z \operatorname{sen} x)dx + \cos x dz$

11-86. $\operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{z} dx + \dfrac{\sqrt{z^2 - x^2}}{z} dz.$

Calcular a para que las expresiones siguientes sean diferenciales totales exactas.

11-87. $\dfrac{(x + az)dx + (ax + z)dz}{(x - z)^3}$

11-88. $\dfrac{(x - z)dx + (x + z)dz}{(x^2 + z^2)^a}.$

Las expresiones siguientes, ¿tienen un máximo o un mínimo?

11-89. $y = (a \cos x + b \cos z)^2 + (a \operatorname{sen} x + b \operatorname{sen} z)^2$

11-90. $y = xz^2(6 - x - y)^3$

11-91. $y = x^3 + z^3 - 9xz + 27$

11-92. $y = 4xz + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$

11-93. $y = x^2 - xz + z^2 - 3z$

11-94. $y = x^3 - 6xz + z^3 + 3x + 6z$

11-95. $y = x^4 + z^4 + 12x^2z^2 - 8x + 8z$

11-96. $y = (x^2 + z^2)^2 - 2a^2(x^2 - z^2) + 4$

11-97. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} z + \operatorname{sen}(x + z)$

11-98. $y = x^3 - 3ax^2 - 4az^2 + 1.$

Problemas:

11-99. Dos lados de un triángulo tienen 20 cm y 30 cm y el ángulo comprendido es de 30°. Calcular la variación dS de la superficie si se aumenta 1 cm la longitud de cada uno de sus lados, y el ángulo en 1°.

11-100. Si $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$, demostrar que:

$$x\frac{\partial y}{\partial x} + z\frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$

11-101. La presión, el volumen y la temperatura absoluta de un gas, están ligadas por la fórmula $pv = 50T$. En un cierto momento $p = 50$ barias y decrece a la velocidad de 1 baria por segundo; la temperatura es de 500 °C y crece a la velocidad de 1 °C por segundo. ¿A qué velocidad varía el volumen?

11-102. Dividir el número 18 en tres partes tales que su producto sea máximo.

11-103. Demostrar que la suma de tres cantidades positivas, cuyo producto es constante, es máxima cuando estas tres cantidades son iguales.

11-104. Sea la expresión $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} z + \cos(x + z)$. Buscar los valores de x y de z que hacen mínima o máxima esta expresión.

11-105. El volumen de un paralelepípedo es 64 m³. ¿Cuáles son las dimensiones que dan una superficie total mínima, es decir, la más económica?

11-106. La suma de los lados de un triángulo es igual a 20 m. Demostrar que la superficie es máxima cuando el triángulo es equilátero.

11-107. Un cuadrilátero inscrito tiene un ángulo igual a 120°. Demostrar que su superficie es máxima cuando los dos ángulos opuestos son iguales a 90°.

11-108. Un cilindro recto de radio R y de altura H, está cubierto por una semiesfera del mismo radio. Demostrar que, si la base permanece constante, el volumen crece numéricamente πR^2 veces más rápido que la altura.

11-109. Un *generador* eléctrico de f.e.m. E y resistencia r, suministra energía a una resistencia exterior R. Tenemos: $E = 100$ V, $r = 10$ ohmios, $R = 40$ ohmios. Si R varía en $dR = +1$ ohmio, y si E varía en $dE = -2$ voltios, calcular la variación dI de corriente.

11-110. Un condensador eléctrico, de capacidad $C = 200$ μF está conectado a una d.d.p. continua $V = 100$ voltios. Si C varía en $dC = 10$ picofaradios y si V varía en $dV = +2$ voltios, calcular la variación dW de la energía almacenada. (1 picofaradio $= 10^{-12}$ Faradios).

11-111. Un hilo metálico tiene una longitud $l = 100$ m, y un diámetro $D = 1$ cm. Por la acción del calor, l aumenta en $dl = 10$ cm, y su diámetro D aumenta $dD = 0{,}1$ mm. Calcular la variación dR de su resistencia eléctrica, sabiendo que es un hilo de cobre, siendo: $\rho = 1{,}6$ μΩ cm²/cm.

11-112. Un condensador eléctrico, de capacidad $C = 10$ μF está conectado a una tensión alterna de frecuencia $f = 50$ Hz. Si C varía en $dC = +10$ picofaradios y si f varía en $df = -2$, calcular la variación dZ de su impedancia $\dfrac{1}{C\omega}$ (1 picofaradio $= 10^{-12}$ Faradios).

11-113. En radio, la longitud de onda de un circuito oscilante es:

$$\lambda^m = 1.885 \sqrt{L \cdot C} \qquad \begin{pmatrix} L \text{ en } \mu \text{ henrios} \\ C \text{ en } \mu \text{ faradios} \end{pmatrix}$$

Tenemos: $L = 1.000\ \mu H$, $C = \dfrac{1}{1.000}\ \mu F$.

Si L varía en $dL = +10\ \mu H$ y C varía en $dC = -20$ picafaradios, calcular la variación $d\lambda$ de la longitud de onda.

11-114. Una bobina tiene por inductancia propia $L = 20$ henrios y por resistencia $R = 1.000$ ohmios; la frecuencia es $f = 50$ Hz. Si f varía en $df = +2$ y si R varía en $dR = -20$ ohmios, calcular la variación dZ de su impedancia total.

11-115. El volumen de un paralelepípedo recto es, en función de sus tres dimensiones: $V = b \cdot l \cdot h$. Tenemos: $b = 1$ m, $l = 2$ m, $h = 3$ m. Si b varía en $db = +1$ cm, l varía en $dl = 2$ cm y h varía en $dh = -3$ cm, calcular la variación dV del volumen.

11-116. Tenemos un cono de metal, cuyo radio de la base es $R = 10$ cm, y la altura $h = 20$ cm. Al calentarlo, R aumenta en 1 mm y h aumenta en 2 mm. Calcular la variación dV de su volumen.

11-117. La fuerza electromotriz de una dínamo es $E = Nn\Phi$, donde $N = 1.000$ espiras, $n = 10$ vueltas por segundo, y $\Phi = 1$ Wb. Si n varía en $dn = +1$ y Φ varía en $d\Phi = -\dfrac{1}{2}$ Wb, calcular la variación dE de la f.e.m.

Calcular la diferencial segunda total de las funciones de dos variables independientes:

11-118. $y = e^{\frac{x}{z}}$

11-119. $y = \operatorname{sen} \frac{x}{z}$

11-120. $y = \operatorname{Log} \frac{x}{z}$

11-121. $y = \operatorname{sen} x \cdot \cos z.$

CAPITULO XII

Curvatura y Radios de curvatura

Calcular el radio de curvatura en un punto cualquiera de las curvas siguientes:

12-1. $y = \dfrac{K^2}{x}$

12-2. $y = \dfrac{a}{x}\sqrt{ax - x^2}$

12-3. $y = ax^2 + bx + c$

12-4. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

12-5. $y^2 = 4ax$

12-6. $a^2y = x^3$

12-7. $y^n = ax^{n+1}$

12-8. $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$ para $x = 0$

12-9. $x^2 + 4y^2 - 10x = 0$ para $x = 2$

12-10. $y = e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$ para $x = 0$

12-11. $y = \operatorname{sen}^2 x$ para $x = \dfrac{\pi}{4}$

12-12. $y = xe^{-x}$ para $x = 0$

12-13. $y^2 = \dfrac{a^2(a - x)}{x}$

(en el mínimo de y)

12-14. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ para $x = 0$.

Calcular el radio de curvatura en un punto cualquiera de las curvas siguientes:

12-15. $\rho = a\omega$

12-16. $\rho = ae^{\omega}$

12-17. $\rho = ae^{m\theta}$

12-18. $\rho = \dfrac{a}{\theta}$

12-19. $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$

12-20. $\rho = a \cos^2 \dfrac{\omega}{2}$

12-21. $\rho^2 = 2a^2 \operatorname{sen} 2\theta$

12-22. $\rho = a \cdot \operatorname{sen} 2\theta$

12-23. $\rho = a + b \cos \theta$

12-24. $\begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$

12-25. $\rho = 3 + 2\cos\theta$ para $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

12-26. $\rho^2 = \dfrac{a^2}{\cos 2\theta}$.

Calcular el radio de curvatura, en el punto de ordenada mínima, de las curvas representadas por las funciones siguientes:

12-27. $y = x \operatorname{Log} x$

12-28. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$

12-29. $y = e^2e^{-x}$

12-30. $y = \operatorname{sen}^3 x \quad (0 < x < 2\pi)$

12-31. $y = \cos x \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

12-32. $y = xe^x$

Calcular las coordenadas del centro de curvatura de las curvas siguientes:

12-33. $y = \operatorname{Log} x$ para $x = 1$

12-34. $y = \sqrt{2x + 3}$ para $x = 0$

12-35. $y = \operatorname{sen} 3x$ para $x = \dfrac{\pi}{3}$

12-36. $y^2 = 8x$ para $x = 0$ y para $x = 2$

12-37. $y = \dfrac{1}{x}$ para $x = 2$

12-38. $y = x^3 - 6x + 4$ para $x = 2$

12-39. $x^3 + y^3 - 4xy$ para $x = 2$

12-40. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$ para $x = 2$

12-41. $x^3 + y^3 - 4xy = 0$ para $x = 3$

12-42. Calcular el radio de curvatura de la parábola:

$$y^2 - 4y - 4x = 8$$

en el punto en el que corta al eje de las x.

12-43. Radio de curvatura de la cicloide:

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = a(1 - \cos\theta)$$

en un punto cualquiera y en el punto de ordenada máxima.

Encontrar el máximo y el mínimo del radio de curvatura de las curvas:

12-44. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

12-45. $y = 2x + \dfrac{3}{x}$

12-46. $y = \operatorname{sen} x$

12-47. $\rho = a \cdot \operatorname{sen}^3 \dfrac{\theta}{3}$.

12-48. Encontrar el menor radio de curvatura de la curva:

$$y = \operatorname{Log} x.$$

12-49. Demostrar que el radio de curvatura de la curva

$$y = ax^2 + bx + c$$

es mínimo en un vértice.

Calcular el radio de curvatura de las curvas siguientes:

12-50. $y = \dfrac{4x}{1 + 4x}$ para $x = 0$, y para $x = 1$

12-51. $y = \sqrt{2x + 3}$ para $x = 0$

12-52. $y = 2x - \dfrac{4}{x}$ en el punto correspondiente a $y = 0$

12-53. $y = \operatorname{tg} x$ para $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$

12-54. $y = 4x^4 - 2x^2 + 1$, en el momento máximo y en el mínimo de y.

12-55. $y = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} = f(\omega)$, cuando $LC\omega^2 = 1$

12-56. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$ para $x = 0$

12-57. $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$ *para* $t = 1$. (*Respuesta*: R = 6).

12-58. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t, \end{cases}$ para $t = t_1$. (*Respuesta*: $R = 3a \operatorname{sen} t_1 \cos t_1$).

Sumario del Tomo II

CALCULO INTEGRAL (Primera parte)

Las integrales. Integrales definidas.
Estudio *detallado* de los procedimientos de integración.
Numerosos ejemplos explicados detalladamente.
Algunos ejemplos de integrales aplicadas a electricidad.

Aplicación de las integrales:

Cálculo de los valores medios y eficaces.
Cálculo de las superficies de las curvas.
Líneas trigonométricas hiperbólicas y aplicaciones a las integrales.
Cálculo de las longitudes de las curvas.
Cálculo de los volúmenes de revolución.
Cálculo de las superficies laterales de volúmenes de revolución.
Cálculo de la posición de los centros de gravedad.

La segunda parte del *Cálculo Integral* se trata en el Tomo IV, que contiene:

El cálculo de los momentos de inercia.
24 ejemplos de aplicación de las Integrales a la Electricidad, Mecánica, Radio, Resistencia de Materiales, etc.
La serie de FOURIER, con ejemplos *detallados* de los desarrollos.
Las integrales curvilíneas, las integrales dobles y triples (con numerosos ejemplos).

MELENDEZ VALDES, 14 y 65 - MADRID-15